

经全国中小学教材审定委员会  
2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

# 数学

选修 4-2

## 矩阵与变换

人民教育出版社 课程教材研究所 编著  
中学数学课程教材研究开发中心



人民教育出版社  
A 版

普通高中课程标准实验教科书

# 数学

选修 4-2

## 矩阵与变换

人民教育出版社 课程教材研究所 编著  
中学数学课程教材研究开发中心



普通高中课程标准实验教科书

数 学

选修 4-2

A 版

矩阵与变换

人民教育出版社 课程教材研究所 编著  
中学数学课程教材研究开发中心

\*

人民教育出版社 出版发行

网址: <http://www.pep.com.cn>

北京天宇星印刷厂印装 全国新华书店经销

\*

开本: 890 毫米  $\times$  1 240 毫米 1/16 印张: 5.25 字数: 114 000

2007 年 1 月第 2 版 2008 年 6 月第 7 次印刷

ISBN 978-7-107-19623-2 定价: 5.30 元  
G · 12673 (课)

著作权所有·请勿擅用本书制作各类出版物·违者必究

如发现印、装质量问题,影响阅读,请与本社出版科联系调换。

(联系地址:北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编:100081)

主 编：刘绍学

副 主 编：钱珮玲 章建跃

主要作者：李龙才 章建跃

责任编辑：俞求是

美术编辑：王俊宏 王 艾

封面设计：李宏庆



精品教学网[www.itvb.net](http://www.itvb.net)

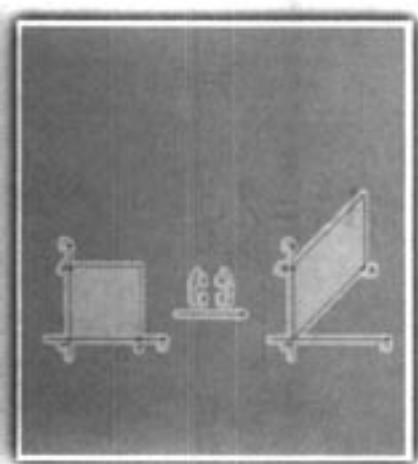
全力打造全国最新最全的免费视频教学网站，现有内容已经覆盖学前，小学，初中高中，大学，职业等各学段欢迎各位爱学人士前来学习交流。

**QQ309000116**

# 目 录

---

引言 .....	1
第一讲 线性变换与二阶矩阵 .....	3
一 线性变换与二阶矩阵 .....	3
(一) 几类特殊线性变换及其二阶矩阵	
1. 旋转变换 .....	3
2. 反射变换 .....	6
3. 伸缩变换 .....	6
4. 投影变换 .....	7
5. 切变变换 .....	8
(二) 变换、矩阵的相等 .....	8
二 二阶矩阵与平面向量的乘法 .....	11
三 线性变换的基本性质 .....	14
(一) 线性变换的基本性质 .....	14
(二) 一些重要线性变换对单位正方形区域的作用	
.....	19



## 第二讲 变换的复合与二阶矩阵的乘法

.....	29
一 复合变换与二阶矩阵的乘法 .....	29
二 矩阵乘法的性质 .....	36

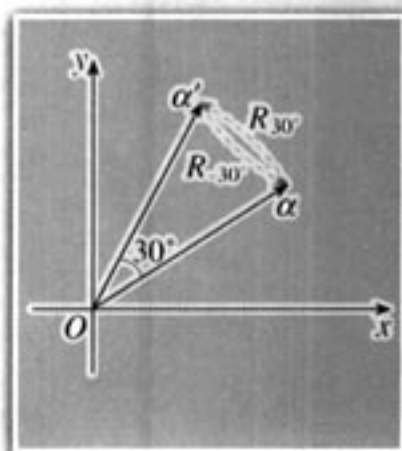
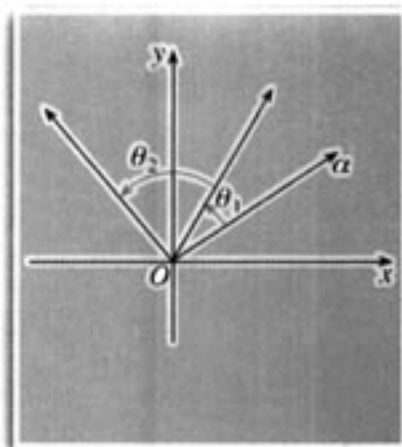
## 第三讲 逆变换与逆矩阵 .....

一 逆变换与逆矩阵 .....	43
1. 逆变换与逆矩阵 .....	43
2. 逆矩阵的性质 .....	47
二 二阶行列式与逆矩阵 .....	50
三 逆矩阵与二元一次方程组 .....	55
1. 二元一次方程组的矩阵形式 .....	56
2. 逆矩阵与二元一次方程组 .....	57
探究与发现 三阶矩阵与三阶行列式 .....	62

## 第四讲 变换的不变量与矩阵的特征向量 .....

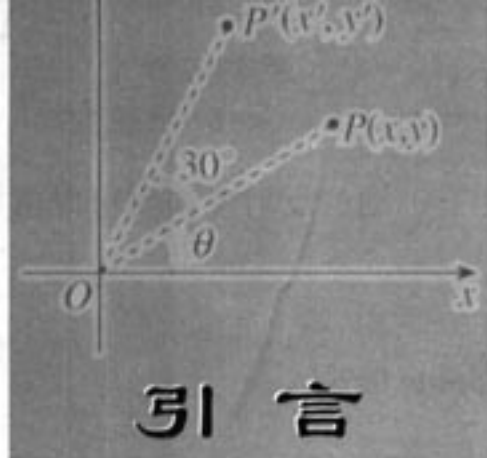
一 变换的不变量——矩阵的特征向量 .....	63
1. 特征值与特征向量 .....	63
2. 特征值与特征向量的计算 .....	66
二 特征向量的应用 .....	71
1. $A^*a$ 的简单表示 .....	71
2. 特征向量在实际问题中的应用 .....	73

## 学习总结报告 .....



$$A\xi = \lambda\xi$$

$$\begin{vmatrix} -a & -b \\ -c & \lambda-d \end{vmatrix} = 0$$



## 引言

在初中，我们已学过轴对称、旋转、相似等平面图形的变换。例如，我们知道，把一个平面图形沿着平面上一条直线  $l$  折叠，可以得到它关于直线  $l$  对称的图形，这个图形与原图形全等；新图形上的每一点都是原图形上的某一点关于直线  $l$  的对称点；连接任意一对对称点的线段被直线  $l$  垂直平分。像这样，由一个平面图形（如图 0-1 中的  $\triangle ABC$ ）得到它关于某条直线  $l$  的轴对称图形（图 0-1 中的  $\triangle A'B'C'$ ）叫做平面图形的轴对称变换。

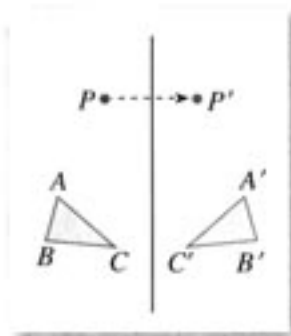


图 0-1

我们也可以这样来看平面图形的轴对称变换：如图 0-1，设直线  $l$  在平面  $\alpha$  内，那么对于平面  $\alpha$  内任意一点  $P$ ，都存在平面  $\alpha$  内唯一点  $P'$ ，使  $P'$  与  $P$  关于直线  $l$  对称。我们称这样的对应关系为平面  $\alpha$  关于直线  $l$  的反射变换。这样，经过这个反射变换，平面  $\alpha$  内的  $\triangle ABC$  就被对应到  $\triangle A'B'C'$ 。

进一步地，如果在平面  $\alpha$  内建立直角坐标系  $xOy$ ，那么平面内的点与有序实数对  $(x, y)$  之间就建立了一一对应。这样，我们又可以从代数的角度来研究反射变换。例如，关于  $x$  轴的反射变换，把平面  $\alpha$  内的任意一点  $P(x, y)$  对应到它关于  $x$  轴的对称点  $P'(x', y')$ 。对于坐标  $P(x, y)$  与  $P'(x', y')$ ，可以得到

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases} \quad ①$$

显然，表达式①完全刻画了关于  $x$  轴的反射变换。因此，也称表达式①为关于  $x$  轴的反射变换。

我们将反射变换①变形为

$$\begin{cases} x' = x + 0y, \\ y' = 0x - y. \end{cases} \quad ②$$

由于②式由右端式子中  $x, y$  的系数唯一确定，我们把它们按原来的顺序写出来，并在两端分别加上一个括号，就得到正方形数表  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 。这个正方形数表也完全刻画了关于  $x$



轴的反射变换. 我们把这种正方形数表称为二阶矩阵. 这样关于  $x$  轴的反射变换就可以由二阶矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  完全确定.

类似地, 在直角坐标系  $xOy$  中, 平面内的许多几何变换都具有形式

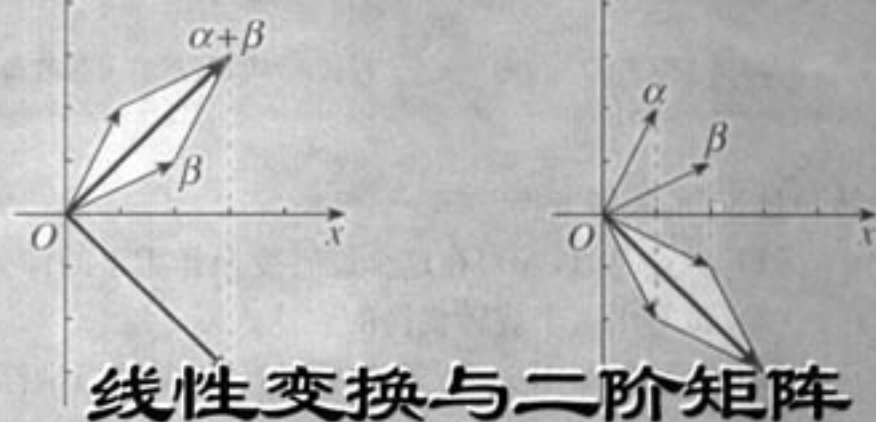
$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{cases} \quad (3)$$

其中  $a, b, c, d$  均为常数. 变换③可以由二阶矩阵  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  完全确定.

数学中经常通过引入新的工具, 建立不同对象之间的联系来研究问题. 例如, 引入平面直角坐标系后, 我们可以通过方程来研究平面曲线, 也可以通过平面曲线来研究方程. 在引进二阶矩阵概念后, 能否对二阶矩阵与平面内的某些几何变换进行类似的研究呢? 这就是本专题要解决的主要问题.

本专题将以矩阵为工具, 研究一些几何变换, 并以平面图形的变换为背景, 讨论二阶矩阵的乘法及性质、逆矩阵和矩阵的特征向量的概念等, 用变换的观点理解解二元一次方程组的意义, 初步展示矩阵应用的广泛性, 为进一步学习打下基础.

## 第一讲



## 线性变换与二阶矩阵

在平面直角坐标系中，平面内的点与有序实数对有一一对应关系。这样，借助直角坐标系，我们可以用代数方法表示几何变换，进而就可以从代数的角度研究几何变换。本讲中，我们将在建立一些几何变换的代数表示的基础上，引入线性变换的概念，通过线性变换引入二阶矩阵，并进一步建立线性变换与二阶矩阵的联系，用矩阵研究线性变换的基本性质。

### 一 线性变换与二阶矩阵

#### (一) 几类特殊线性变换及其二阶矩阵

##### 1. 旋转变换

#### 探究

将直角坐标系中所有点绕原点沿逆时针方向旋转一个角度  $\alpha$ 。设平面内点  $P(x, y)$  经过旋转后变成点  $P'(x', y')$ ，那么如何用  $P$  的坐标  $(x, y)$  表示  $P'$  的坐标  $(x', y')$ ？

我们先从简单情形开始。

如图 1.1-1 所示，在直角坐标系  $xOy$  内，每个点都绕原点  $O$  按逆时针方向旋转  $180^\circ$ 。设点  $P(x, y)$  经过旋转后变成点  $P'(x', y')$ ， $x', y'$  与  $x, y$  有什么关系呢？

可以得到， $x' = -x$ ， $y' = -y$ ，即

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y. \end{cases} \quad ①$$

我们将①称为旋转角为  $180^\circ$  的旋转变换的表达式。它建立了平面内的每个点  $P$  到其对应点  $P'$  的对应关系，我们称  $P'$  是  $P$  在这个旋转变换作用下的像。

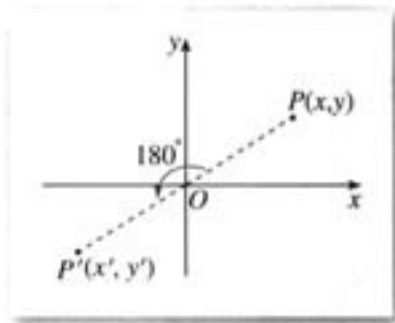


图 1.1-1

例 1 在直角坐标系  $xOy$  内，将每个点绕原点  $O$  按逆时针方向旋转  $30^\circ$  的变换称为旋

转角是  $30^\circ$  的旋转变换.

(1) 求点  $A(1, 0)$  在这个旋转变换作用下的像  $A'$ ;

(2) 试写出这个旋转变换的表达式.

解: (1) 如图 1.1-2, 不难看出, 点  $A'$  的横坐标和纵坐标分别为

$$\begin{aligned} x &= |OA| \cos 30^\circ \\ &= 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y &= |OA| \sin 30^\circ \\ &= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

因此, 点  $A(1, 0)$  在这个旋转变换作用下的像为  $A'(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ .

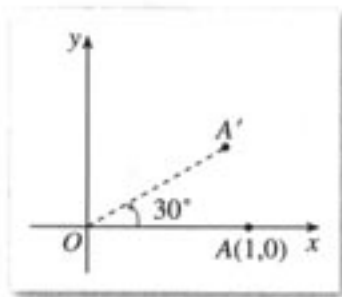


图 1.1-2

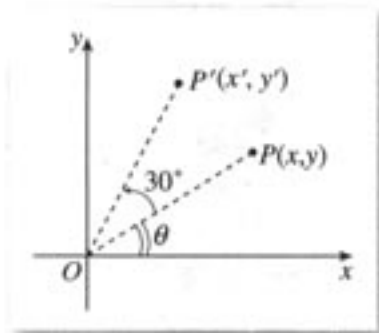


图 1.1-3

(2) 如图 1.1-3, 分别连接  $OP$ ,  $OP'$ , 设  $OP=OP'=r$ , 记  $\theta$  是以  $x$  轴的正半轴为始边、以射线  $OP$  为终边的角. 由三角函数的定义得

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta; \\ x' = r \cos(\theta + 30^\circ), \\ y' = r \sin(\theta + 30^\circ). \end{cases}$$

由两角和的三角函数公式得

$$\begin{cases} x' = x \cos 30^\circ - y \sin 30^\circ, \\ y' = x \sin 30^\circ + y \cos 30^\circ, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y. \end{cases} \quad (2)$$

这就是所求的旋转变换的表达式.

由于②式由其右端式子中  $x, y$  的系数唯一确定, 我们把这些系数按原来的顺序写出

来, 并在两端分别加上一个括号, 得到一个正方形数表  $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ . 可以发现, 这个正

方形数表由旋转角是  $30^\circ$  的旋转变换唯一确定；反之，旋转角是  $30^\circ$  的旋转变换也可以由这个正方形数表唯一确定。所以，这个正方形数表唯一刻画了旋转角是  $30^\circ$  的旋转变换。

事实上，在平面直角坐标系  $xOy$  内，很多几何变换都具有下列形式：

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy. \end{cases} \quad (3)$$

其中系数  $a, b, c, d$  均为常数。我们把形如③的几何变换叫做线性变换<sup>①</sup> (linear transformation)，③式叫做这个线性变换的坐标变换公式。 $P'(x', y')$  是  $P(x, y)$  在这个线性变换作用下的像。

与例 1 的解答一样，我们引进正方形数表  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，那么线性变

换③可以由  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  唯一确定；反之， $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  也可以由线性变换③唯一确定。

像这样，由 4 个数  $a, b, c, d$  排成的正方形数表  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  称为二阶矩阵<sup>②</sup> (matrix)，数  $a, b, c, d$  称为矩阵的元素。在二阶矩阵中，横的叫行，从上到下依次称为矩阵的第一行、第二行；竖的叫列，从左到右依次称为矩阵的第一列、第二列。矩阵通常用大写的英文字母  $A, B, C, \dots$  表示。

元素全为 0 的二阶矩阵  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  称为零矩阵，简记为 0。矩阵

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  称为二阶单位矩阵，记为  $E_2$ 。

有了二阶矩阵  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，我们就可以利用它来研究线性变换③。

与例 1(2) 的解答过程一样，我们可以得到直角坐标系  $xOy$  内的每个点绕原点  $O$  按逆时针方向旋转  $\alpha$  角的旋转变换（通常记为  $R_\alpha$ ）的坐标变换公式：

如图 1.1-4，分别连接  $OP, OP'$ ，设  $OP = OP' = r$ ，记  $\theta$  是以  $x$  轴的正半轴为始边、以射线  $OP$  为终边的角，由三角函数的定义得

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta; \\ x' = r \cos(\theta + \alpha), \\ y' = r \sin(\theta + \alpha). \end{cases}$$

所以，绕原点  $O$  按逆时针方向旋转  $\alpha$  角的旋转变换的坐标变换公式是

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases} \quad (4)$$

<sup>①</sup> 在表达式③中， $x', y'$  都是关于  $x, y$  的常数项为 0 的一次式，通常称“一次”为“线性”。

<sup>②</sup> 二阶矩阵仅仅是一个包含两行、两列的数表，它既不是数，也不是代数式。

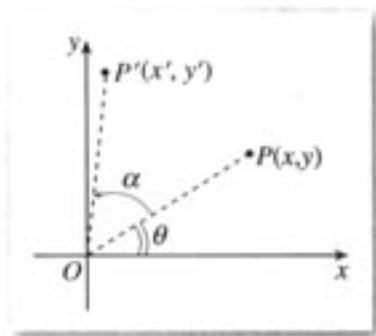


图 1.1-4



对应的二阶矩阵为

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

## 2. 反射变换

在引言中我们已经看到, 关于  $x$  轴的反射变换把直角坐标系  $xOy$  内的任意一点  $P(x, y)$  对应到它关于  $x$  轴的对称点  $P'(x', y')$ , 相应的坐标变换公式是

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases}$$

与之对应的二阶矩阵是  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

同样, 关于  $y$  轴的反射变换把直角坐标系  $xOy$  内的任意一点  $P(x, y)$  对应到它关于  $y$  轴的对称点  $P'(x', y')$ , 相应的坐标变换公式是

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = y. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵为  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

我们知道, 在直角坐标系  $xOy$  内, 任意一点  $P(x, y)$  关于直线  $y=x$  的对称点为  $P'(y, x)$ . 所以, 关于直线  $y=x$  的反射变换把直角坐标系内任意一点  $P(x, y)$  对应到它关于直线  $y=x$  的对称点  $P'(x', y')$ , 相应的坐标变换公式是

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵为  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

一般地, 我们把平面上的任意一点  $P$  对应到它关于直线  $l$  的对称点  $P'$  的线性变换叫做关于直线  $l$  的反射 (reflection).

### 探究

在直角坐标系  $xOy$  内, 直线  $l$  过原点, 倾斜角为  $\alpha$ . 你能求出关于直线  $l$  的反射变换的坐标变换公式吗?

## 3. 伸缩变换

在直角坐标系  $xOy$  内, 将每个点的横坐标变为原来的  $k_1$  倍, 纵坐标变为原来的  $k_2$  倍, 其中  $k_1, k_2$  均为非零常数, 我们称这样的几何变换为伸缩变换 (stretching).

例2 在直角坐标系  $xOy$  内, 将每一点的纵坐标变为原来的 2 倍, 横坐标保持不变.

(1) 试确定该伸缩变换的坐标变换公式及其对应的二阶矩阵;

(2) 求点  $A(1, -1)$  在该伸缩变换作用下的像  $A'$ .

解: (1) 设在这个伸缩变换作用下, 直角坐标系  $xOy$  内的任意一点  $P(x, y)$  对应到点  $P'(x', y')$ , 则

$$x' = x, y' = 2y.$$

因此, 所求的坐标变换公式为

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = 2y. \end{cases}$$

从而, 对应的二阶矩阵为  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

(2) 将点  $A(1, -1)$  的坐标代入坐标变换公式, 得

$$\begin{cases} x' = 1, \\ y' = 2 \times (-1) = -2. \end{cases}$$

从而  $A'$  的坐标为  $(1, -2)$ .

一般地, 在直角坐标系  $xOy$  内, 将每个点的纵坐标变为原来的  $k$  倍 ( $k$  是非零常数), 横坐标保持不变的线性变换, 其坐标变换公式是

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = ky. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵是  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ .

将每个点的横坐标变为原来的  $k$  倍 ( $k$  是非零常数), 纵坐标保持不变的线性变换, 其坐标变换公式是

$$\begin{cases} x' = kx, \\ y' = y. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵是  $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

将每个点的横坐标变为原来的  $k_1$  倍, 纵坐标变为原来的  $k_2$  倍 ( $k_1, k_2$  均为非零常数) 的线性变换, 其坐标变换公式是

$$\begin{cases} x' = k_1x, \\ y' = k_2y. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵为  $\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$ .

#### 4. 投影变换

设  $l$  是平面内一条给定的直线. 对平面内的任意一点  $P$  作直线  $l$  的垂线, 垂足为点  $P'$ , 则称点  $P'$  为点  $P$  在直线  $l$  上的投影. 将平面上每一点  $P$  对应到它在直线  $l$  上的投影  $P'$ , 这

个变换称为关于直线  $l$  的投影 (projection) 变换.

**例 3** 如图 1.1-5, 在直角坐标系  $xOy$  内, 过任意一点  $P$  作  $x$  轴的垂线, 垂足为点  $P'$ , 我们称点  $P'$  为点  $P$  在  $x$  轴上的 (正) 投影. 如果一个变换把直角坐标系内的每一点对应到它在  $x$  轴上的 (正) 投影, 那么称这个变换为关于  $x$  轴的 (正) 投影变换.

设在关于  $x$  轴的 (正) 投影变换的作用下, 点  $P(x, y)$  对应到点  $P'(x', y')$ , 则

$$x' = x, y' = 0.$$

因此, 该变换的坐标变换公式为

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = 0. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵为  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

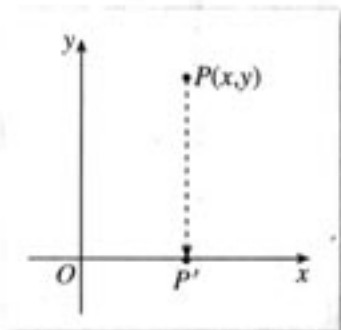


图 1.1-5

如果以直线  $l$  为  $x$  轴建立直角坐标系  $xOy$ , 则所有的投影变换都可以看成关于  $x$  轴的投影变换.

## 5. 切变变换

如图 1.1-6, 在直角坐标系  $xOy$  内, 将每一点  $P(x, y)$  沿着与  $x$  轴平行的方向平移  $ky$  个单位变成点  $P'$ , 其中  $k$  是非零常数, 称这类变换为平行于  $x$  轴的切变 (shears) 变换.

设  $P'(x', y')$ , 则

$$x' = x + ky, y' = y.$$

因此, 平行于  $x$  轴的切变变换的坐标变换公式为

$$\begin{cases} x' = x + ky, \\ y' = y. \end{cases}$$

从而, 对应的二阶矩阵为  $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

类似的, 平行于  $y$  轴的切变变换是指将直角坐标系内的每一点  $P(x, y)$  沿着与  $y$  轴平行的方向平移  $kx$  个单位 (其中  $k$  是非零常数) 的线性变换. 其坐标变换公式为

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = kx + y. \end{cases}$$

对应的矩阵为  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ .

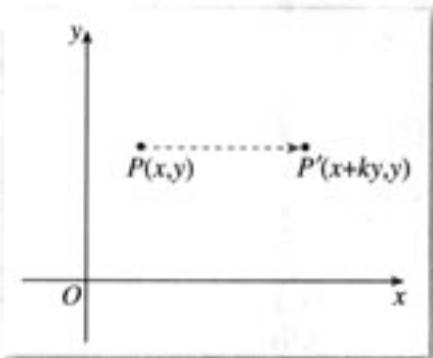


图 1.1-6

## (二) 变换、矩阵的相等

我们知道, 在直角坐标系  $xOy$  内, 把每个点绕原点  $O$  按逆时针方向旋转  $\frac{3\pi}{2}$ , 与把每个

点绕原点  $O$  按顺时针方向旋转  $\frac{\pi}{2}$  的变换效果是一样的. 实际上, 旋转角是  $\frac{3\pi}{2}$  的旋转变换的坐标变换公式是

$$\begin{cases} x' = x \cos \frac{3\pi}{2} - y \sin \frac{3\pi}{2}, \\ y' = x \sin \frac{3\pi}{2} + y \cos \frac{3\pi}{2}, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵是

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{3\pi}{2} & -\sin \frac{3\pi}{2} \\ \sin \frac{3\pi}{2} & \cos \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

旋转角是  $-\frac{\pi}{2}$  的旋转变换的坐标变换公式是

$$\begin{cases} x' = x \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) - y \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right), \\ y' = x \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) + y \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right), \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x. \end{cases}$$

对应的二阶矩阵是

$$\begin{pmatrix} \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此, 这两个旋转变换的坐标变换公式及对应的二阶矩阵是分别相同的. 这时我们称这两个旋转变换相等.

一般地, 设  $\sigma, \rho$  是同一个直角坐标平面内的两个线性变换. 如果对平面内的任意一点  $P$ , 都有  $\sigma(P) = \rho(P)$ , 则称这两个线性变换相等, 简记为  $\sigma = \rho$ .

变换与函数类似. 函数把实数对应到实数; 变换把点对应到点.



设  $\sigma, \rho$  所对应的二阶矩阵分别为  $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ . 如果  $\sigma = \rho$ , 那么它们对应的系数分别相等, 即  $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2$ . 这时我们也称二阶矩阵  $A$  与二阶矩阵  $B$  相等, 即

对于两个二阶矩阵  $A$  与  $B$ , 如果它们的对应元素都分别相等, 则称矩阵  $A$  与矩阵  $B$  相等, 记作  $A=B$ .

例 3 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & x-1 \\ y & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} p-1 & -2 \\ 2 & q \end{bmatrix}$ , 且  $A=B$ , 求  $p, q, x, y$ .

解: 由矩阵相等的定义得

$$\begin{cases} 1=p-1, \\ x-1=-2, \\ y=2, \\ 0=q. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} p=2, \\ q=0, \\ x=-1, \\ y=2. \end{cases}$$



1. 在直角坐标系  $xOy$  内, 如果把绕原点  $O$  按逆时针方向旋转  $\alpha$  角的旋转变换记为  $R_\alpha$ , 试给出下列旋转变换的坐标变换公式以及对应的矩阵:

(1)  $R_{45^\circ}$ ; (2)  $R_{90^\circ}$ ; (3)  $R_{360^\circ}$ .

2. 如果一个几何变换把直角坐标系  $xOy$  内任意一点变成这一点关于坐标原点  $O$  的对称点, 那么称这个几何变换为关于坐标原点  $O$  的反射变换, 试求出这个反射变换的变换公式及其矩阵.

3. 过直角坐标系  $xOy$  内的一点  $A$  作一条与  $x+y=0$  平行的直线交  $x$  轴于点  $A'$ , 则称  $A'$  点为过  $A$  点沿着平行于直线  $x+y=0$  的方向在  $x$  轴上的投影. 设一个几何变换把直角坐标系  $xOy$  内的任意一点变成过这一点沿着平行于直线  $x+y=0$  的方向在  $x$  轴上的投影. 试求

(1) 点  $A(2, 1)$  在这个投影变换下的像;

(2) 这个投影变换的坐标变换公式及其矩阵.

4. 对于旋转变换  $R_{\frac{\pi}{2}}$ , 除了  $R_{-\frac{\pi}{2}}=R_{\frac{\pi}{2}}$  以外, 你还能再找出一些与  $R_{\frac{\pi}{2}}$  相等的平面变换吗?

5. 设  $X = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ x & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 2 & -y \\ 3 & z \end{bmatrix}$ , 且  $X=Y$ , 求  $x, y, z$ .

6. (1) 求直角坐标系  $xOy$  内关于直线  $l: y=2x$  的投影变换的坐标变换公式及其矩阵;  
 (2) 如果直线  $l$  为  $Ax+By=0$  (其中  $A, B$  不全为 0), 那么关于直线  $l$  的投影变换的坐标变换公式及其矩阵分别是什么?

## 二 二阶矩阵与平面向量的乘法

我们知道, 线性变换与二阶矩阵是一一对应的. 能否直接用二阶矩阵表示线性变换呢?

在直角坐标系  $xOy$  内, 如果规定每个向量都以坐标原点  $O$  为起点, 那么任何一个向量  $\overrightarrow{OA}$  就由其终点  $A$  唯一确定; 反之, 对直角坐标系  $xOy$  内的任意一点  $A$ , 有唯一的向量  $\overrightarrow{OA}$  与之对应. 从而, 直角坐标系内的向量与点是一一对应的. 因为平面内的点与有序实数对是一一对应的, 从而平面内的向量与有序实数对也是一一对应的. 今后, 为了方便, 我们对向量、点以及有序实数对这三者不加区别. 例如, 我们称点  $A$  的坐标  $(x, y)$  就是向量  $\overrightarrow{OA}$  的坐标, 或直接把向量  $\overrightarrow{OA}$  叫做向量  $(x, y)$ .

向量  $(x, y)$  是一对有序数组,  $x, y$  叫做它的两个分量. 我们把这两个分量按照  $x$  在上,  $y$  在下的次序写成一列  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ , 这种形式的向量称为列向量. 相应的, 形如  $(x, y)$  的向量称为行向量. 在本专题中, 规定所有的平面向量都写成立向量的形式.

为了得到用二阶矩阵表示线性变换的方法, 我们先考察上一节例 1 中得到的旋转角是  $30^\circ$  的旋转变换公式

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y. \end{cases}$$

上式表明, 在旋转变换的作用下, 直角坐标系内的向量  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  变成了新的向量

$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{bmatrix}$ . 我们设想  $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{bmatrix}$  是二阶矩阵  $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$  与向量  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  “相乘”的结果, 即如

果引进二阶矩阵与平面向量的乘法, 使得乘积为

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{bmatrix},$$

那么旋转角是  $30^\circ$  的旋转变换的坐标变换公式就可以写成

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

这样就达到了用二阶矩阵  $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$  表示旋转角是  $30^\circ$  的旋转变换公式的目的, 即通过

如下的方式唯一地确定了旋转变换  $R_{30^\circ}$ :

把任何一个向量  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  变成了新的向量  $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$

因此, 二阶矩阵  $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$  所对应的旋转变换可写成

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

一般地, 我们引入下面的定义.

**定义** 设  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , 规定二阶矩阵  $A$  与向量  $\alpha$  的乘积 (product) 为向量  $\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ , 记为  $A\alpha$  或  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , 即

$$A\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}.$$

这样就定义了矩阵  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  与向量  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  的乘法.

由上述定义可知, 二阶矩阵  $A$  与平面向量  $\alpha$  的乘积仍然是一个平面向量, 它的第一个分量为  $A$  的第一行的元素与  $\alpha$  的对应位置元素乘积的和, 第二个分量为  $A$  的第二行的元素与  $\alpha$  的对应位置元素乘积的和.

**例 1** 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 求  $A\alpha$ .

**解:**  $A\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 1 \times (-1) + 2 \times 3 \\ 0 \times (-1) + 1 \times 3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

定义了二阶矩阵与平面向量的乘法以后, 任何一个线性变换

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (a, b, c, d \text{ 均为常数})$$

都可以表示成

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix};$$

反之, 在直角坐标系  $xOy$  内, 任何一个二阶矩阵  $A$  都唯一确定了一个线性变换, 这个变换把每一个向量  $\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  变成了新向量  $A\alpha = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ . 这样, 我们就实现了用二阶矩阵和平面向量的乘积表示线性变换的目的.

例2 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 求点  $P(2, 2)$  在  $A$  所对应的线性变换的作用下的像  $P'$  的坐标.

解: 因为向量  $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$  在矩阵  $A$  对应的线性变换作用下变为向量

$$\begin{aligned}
 A \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

所以, 点  $P'$  的坐标为  $(-2, 2)$ .



1. 直角坐标系  $xOy$  内的平移变换  $\begin{cases} x' = x + h, \\ y' = y + k \end{cases}$  (其中  $h, k$  是不全为 0 的常数) 能写成二阶矩阵与平面向量乘积的形式吗?

2. 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ , 求  $A\alpha_1$ ,  $A\alpha_2$ ,  $A\alpha$ .

3. 设  $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ , 直角坐标系  $xOy$  内的点  $P(1, 1)$  在矩阵  $A$  所对应的线性变换的作



用下变成点  $P'(x', y')$ , 求  $x', y'$ .

4. 设  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  是任意一个二阶矩阵(其中  $a, b, c, d$  均为常数), 记  $i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,

求  $A0, Ai, Aj$ .

5. 设矩阵  $M$  对应的线性变换把点  $A(1, 2)$  变成点  $A'(2, 3)$ , 把点  $B(-1, 3)$  变成点  $B'(2, 1)$ , 那么这个线性变换把点  $C(-2, 3)$  变成什么?

### 三 线性变换的基本性质

在平面几何的学习中我们直观地看出, 经过轴对称变换、旋转变换等, 平面上的直线变为直线, 三角形变为三角形, ... 一般地, 在线性变换下, 是否仍然有直线变为直线, 三角形变为三角形, ... 呢? 这就是本节要研究的线性变换的性质问题. 我们将以二阶矩阵为工具研究线性变换的基本性质, 并进一步研究线性变换对平面图形的作用.

#### (一) 线性变换的基本性质

为了研究线性变换的性质, 我们先定义“数乘平面向量”和“平面向量加法”:

设向量  $\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ , 规定实数  $\lambda$  与向量  $\alpha$  的乘积  $\lambda\alpha = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix}$ ;

设向量  $\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ ,  $\beta = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ , 规定向量  $\alpha$  与  $\beta$  的和  $\alpha + \beta = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$ .

#### 探究

你能作图说明上述数乘平面向量和平面向量加法的几何意义吗?

前面定义了二阶矩阵与平面向量的乘法. 自然地, 我们要考察相应的运算律问题.

## 探究

设向量  $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ . 如图 1.3-1, 把向量  $\alpha$  先伸长 2 倍再按逆时针方向旋转  $90^\circ$ ; 把向量  $\alpha$  先按逆时针方向旋转  $90^\circ$  再伸长 2 倍, 这两个过程的结果相同吗?

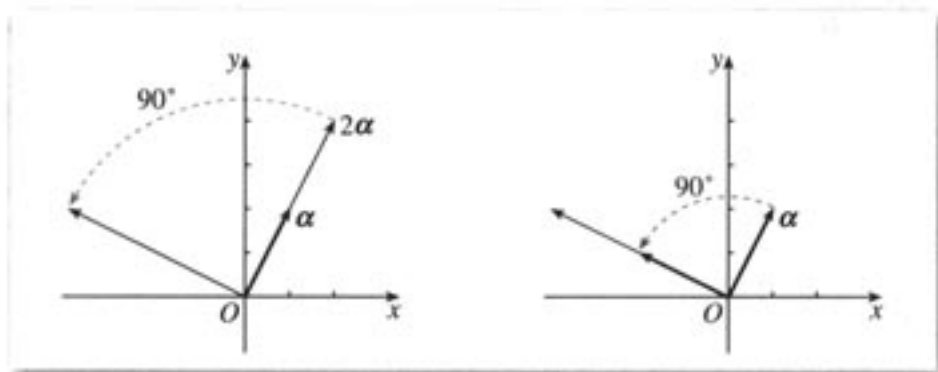


图 1.3-1

绕原点按逆时针方向旋转  $90^\circ$  的旋转变换的矩阵为  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . 上面的结果可以表示为  $A(2\alpha) = 2A\alpha$ . 利用矩阵与向量的乘法也能验证这个结果, 请同学们自己完成.

一般地, 设  $A$  是一个二阶矩阵,  $\alpha$  是平面上的任意一个向量,  $\lambda$  是一个任意实数, 是否也有  $A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha$  成立呢?

事实上, 设  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ,  $\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ , 则

$$\begin{aligned}
 A(\lambda\alpha) &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left[ \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right] \\
 &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a\lambda x + b\lambda y \\ c\lambda x + d\lambda y \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \lambda ax + \lambda by \\ \lambda cx + \lambda dy \end{bmatrix}; \\
 \lambda A\alpha &= \lambda \left[ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right] \\
 &= \lambda \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \lambda ax + \lambda by \\ \lambda cx + \lambda dy \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

所以

$$A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha.$$

### 探究

设向量  $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ . 如图 1.3-2, 先利用平行四边形法则求  $\alpha + \beta$ , 再对向量  $(\alpha + \beta)$  进行关于  $x$  轴的反射变换; 或者, 先对向量  $\alpha, \beta$  做关于  $x$  轴的反射变换, 再利用平行四边形法则求反射变换后的两个向量的和. 这两个过程的结果相同吗?

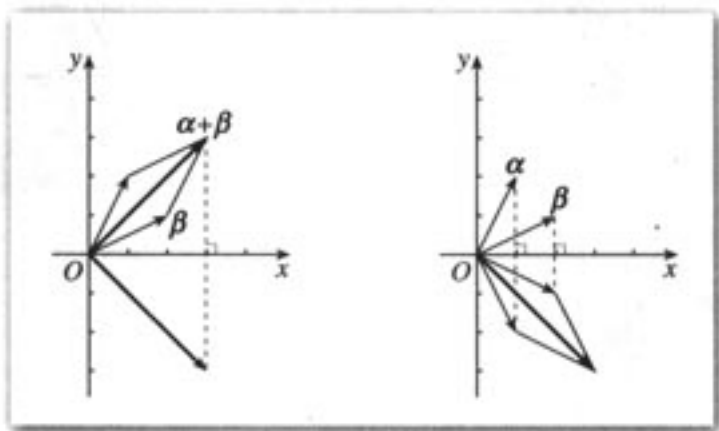


图 1.3-2

关于  $x$  轴的反射变换的矩阵为  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ . 上面的结果可以表示为

$$A(\alpha + \beta) = A\alpha + A\beta.$$

利用矩阵与向量的乘法也能验证这个结果, 请同学们自己完成.

一般地, 设  $A$  是一个二阶矩阵,  $\alpha, \beta$  是平面上的任意两个向量, 是否也有  $A(\alpha + \beta) = A\alpha + A\beta$  成立呢?

事实上, 设  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ,  $\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ ,  $\beta = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ , 因为

$$\begin{aligned} A(\alpha + \beta) &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) \\ c(x_1 + x_2) + d(y_1 + y_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (ax_1 + by_1) + (ax_2 + by_2) \\ (cx_1 + dy_1) + (cx_2 + dy_2) \end{bmatrix}, \\ A\alpha + A\beta &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} ax_1 + by_1 \\ cx_1 + dy_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ax_2 + by_2 \\ cx_2 + dy_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (ax_1 + by_1) + (ax_2 + by_2) \\ (cx_1 + dy_1) + (cx_2 + dy_2) \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

所以

$$A(\alpha + \beta) = A\alpha + A\beta.$$

综上所述, 线性变换有如下基本性质.

**性质 1** 设  $A$  是一个二阶矩阵,  $\alpha, \beta$  是平面上的任意两个向量,  $\lambda$  是一个任意实数, 则

$$(1) A(\lambda\alpha) = \lambda A\alpha;$$

$$(2) A(\alpha + \beta) = A\alpha + A\beta.$$

综合上述两条性质, 可以得到:

**定理 1** 设  $A$  是一个二阶矩阵,  $\alpha, \beta$  是平面上的任意两个向量,  $\lambda_1, \lambda_2$  是任意两个实数, 则

$$A(\lambda_1\alpha + \lambda_2\beta) = \lambda_1 A\alpha + \lambda_2 A\beta. \quad \textcircled{1}$$

证明: 由性质 1 得

$$\begin{aligned}
 A(\lambda_1\alpha + \lambda_2\beta) &= A(\lambda_1\alpha) + A(\lambda_2\beta) \\
 &= \lambda_1 A\alpha + \lambda_2 A\beta.
 \end{aligned}$$

### 思考

点、线是构成平面图形的基本元素. 由变换的概念可知, 线性变换把平面上的点 (或向量) 变成点 (或向量), 那么线性变换把平面上的直线 (或线段) 变成什么图形呢?

从几何图形上容易发现, 在直角坐标  $xOy$  内, 关于  $x$  轴的 (正) 投影变换

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

把垂直于  $x$  轴的直线  $x=a$  ( $a$  为常数) 变成点  $(a, 0)$ , 把其他的直线变成直线  $y=0$ .

我们再考察在伸缩变换

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

作用下, 直线  $y=kx+b$  (其中  $k, b$  均为常数) 变成了什么图形.

由伸缩变换知,

$$x' = x, \quad y' = 2y.$$

代入直线方程  $y=kx+b$ , 得  $\frac{y'}{2} = kx' + b$ , 即  $y' = 2kx' + 2b$ . 分别用  $x, y$  代替  $x', y'$  得

$$y=2kx+2b.$$

因此, 伸缩变换

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

把直线  $y=kx+b$  变成了直线  $y=2kx+2b$  (如图 1.3-3 所示).

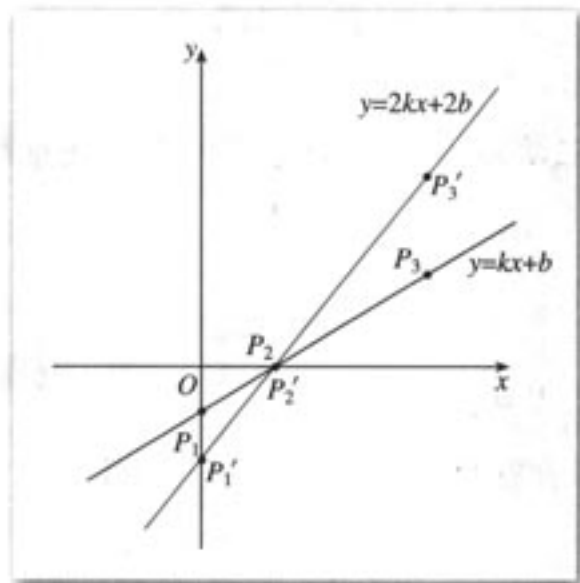


图 1.3-3

我们发现, 这两个线性变换或把直线变成了直线, 或把直线变成了一点.

### 思考

旋转变换

$$R_{30^\circ}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

把直线  $y=kx+b$  (其中  $k, b$  均为常数) 变成了什么图形?

切变变换

$$\sigma: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

把直线  $y=kx+b$  (其中  $k, b$  均为常数) 变成了什么图形?

一般地, 我们有

**性质 2** 二阶矩阵对应的变换 (线性变换) 把平面上的直线变成直线 (或一点).

为了证明性质 2, 我们先用向量的形式来表示直线.

设  $P_1, P_2$  是直角坐标系  $xOy$  内的两个定点,  $P$  是这个平面上的任意一点. 记  $\alpha_1 = \overrightarrow{OP_1}$ ,  $\alpha_2 = \overrightarrow{OP_2}$ ,  $\gamma = \overrightarrow{OP}$ , 则  $P$  点在直线  $P_1P_2$  上当且仅当  $\overrightarrow{P_1P} \parallel \overrightarrow{P_1P_2}$ , 即存在一个实数  $\lambda$ ,



使得  $\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{P_1P_2}$ , 即

$$\gamma - \alpha_1 = \lambda(\alpha_2 - \alpha_1).$$

从而

$$\gamma = (1-\lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha_2.$$

令  $\lambda_1 = 1-\lambda$ ,  $\lambda_2 = \lambda$ , 则

$$\gamma = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 \quad (\text{其中 } \lambda_1, \lambda_2 \text{ 是实数, 且 } \lambda_1 + \lambda_2 = 1), \quad ②$$

这就是由向量  $\alpha_1, \alpha_2$  的终点所确定的直线的向量形式 (如图 1.3-4).

因此, 对任意两个不同的向量  $\alpha, \beta$ , 由它们的终点所确定的直线  $l$  可表示为:

$$\gamma = \lambda_1\alpha + \lambda_2\beta,$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2$  是实参数, 且  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ .

根据定理 1, 直线  $l$  在线性变换  $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  的作用

下变成

$$\gamma' = A(\lambda_1\alpha + \lambda_2\beta) = \lambda_1 A\alpha + \lambda_2 A\beta, \quad ③$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2$  是实参数, 且  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ .

(1) 如果  $A\alpha \neq A\beta$ , 那么 ③ 表示由向量  $A\alpha, A\beta$  的终点所确定的直线. 此时, 二阶矩阵  $A$  所对应的线性变换把平面上的直线变成直线;

(2) 如果  $A\alpha = A\beta$ , 那么  $\lambda_1 A\alpha + \lambda_2 A\beta = A\alpha$ . 由于向量  $A\alpha$  的终点是平面上一个确定的点, 因而, 二阶矩阵  $A$  所对应的线性变换把平面上的直线  $l: \gamma = \lambda_1\alpha + \lambda_2\beta$  变成了一个点  $A\alpha$ .

这样就证明了性质 2.

性质 2 表明, 矩阵所对应的线性变换把平面上的直线变成直线 (特殊情况下变成一点).

## (二) 一些重要线性变换对单位正方形区域的作用

我们已经知道, 在线性变换的作用下, 直线变为直线 (或一个点). 那么, 平面图形在线性变换的作用下会变成什么图形呢?

下面我们利用线性变换的基本性质, 研究平面图形在线性变换的作用下的结果. 为了方便, 我们只考察在线性变换下, 直角坐标系  $xOy$  内的单位正方形区域 (如图 1.3-5) 变成了什么图形.

根据向量加法的平行四边形法则, 图 1.3-5 中的单位正方形区域可用向量形式表示为

$$x_1 i + x_2 j \quad (0 \leq x_1, x_2 \leq 1), \textcircled{1}$$

设  $A$  是一个二阶矩阵, 由矩阵与平面向量乘积的性质得

$$A(x_1 i + x_2 j) = x_1(Ai) + x_2(Aj) \quad (0 \leq x_1, x_2 \leq 1).$$

由于上述等式的右端表示以  $Ai, Aj$  为邻边的平行四边形区域, 所

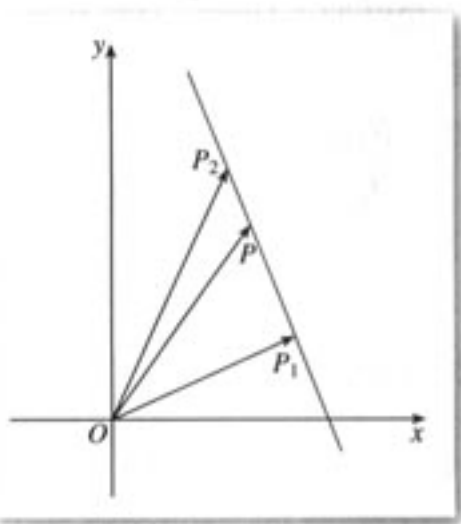


图 1.3-4

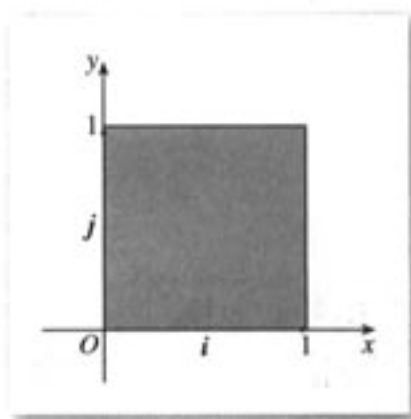


图 1.3-5

① 你能说明一下理由吗?

以, 矩阵  $A$  所对应的线性变换把图 1.3-5 中的单位正方形区域, 变成以  $Ai$ ,  $Aj$  为邻边的平行四边形区域 (如图 1.3-6). 因此, 我们只需考察单位向量  $i, j$  在线性变换作用下的结果, 就能得到单位正方形区域在线性变换作用下所变成的图形.

### 1. 恒等变换

把平面上任意一点变成它本身的几何变换称为恒等变换, 记为  $I$ . 容易看出, 恒等变换保持平面上的每一点的位置不变.

恒等变换  $I$  对应的矩阵为

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

坐标变换公式为

$$I: \begin{cases} x' = x, \\ y' = y. \end{cases}$$

因为

$$E_2 i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$E_2 j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以, 我们有

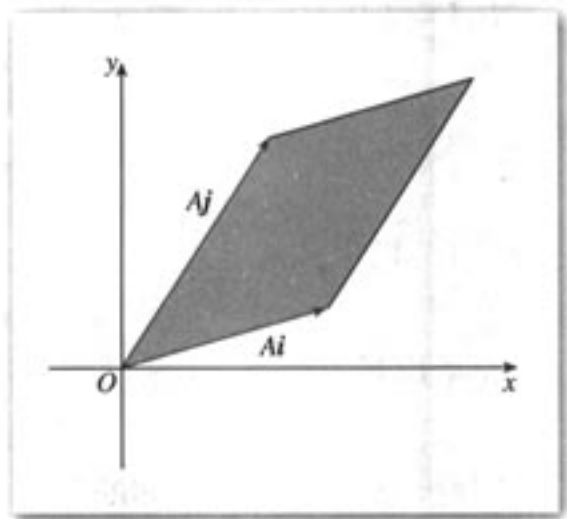


图 1.3-6

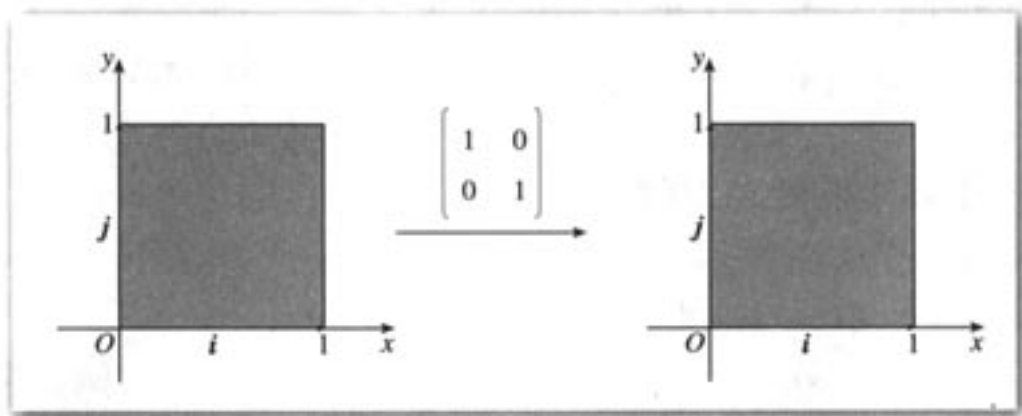


图 1.3-7

### 2. 旋转变换

旋转变换  $R_\alpha$  对应的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix};$$

坐标变换公式为

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases}$$

(1) 当  $\alpha=30^\circ$  时,  $A=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ , 坐标变换公式为

$$\begin{cases} x'=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y, \\ y'=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y. \end{cases}$$

因为

$$Ai=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$Aj=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix},$$

所以, 我们有

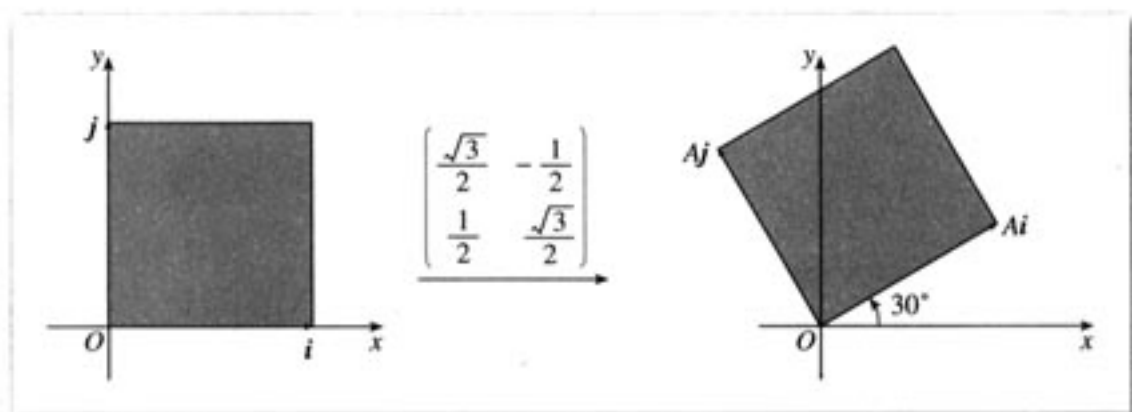


图 1.3-8

(2) 当  $\alpha=90^\circ$  时,  $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , 坐标变换公式为

$$\begin{cases} x'=-y, \\ y'=x. \end{cases}$$

因为

$$Ai=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$Aj=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

所以, 我们有

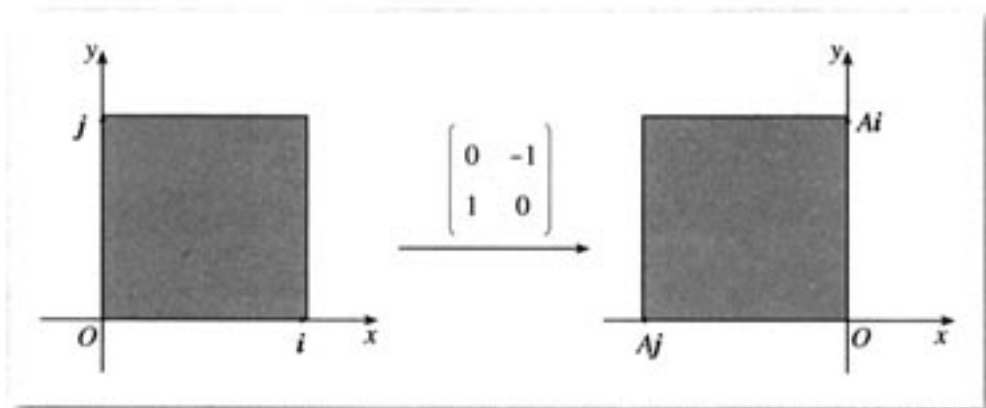


图 1.3-9

(3) 当  $\alpha=270^\circ$  时,  $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ , 坐标变换公式为

$$\begin{cases} x'=y, \\ y'=-x. \end{cases}$$

因为

$$Ai=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$Aj=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

所以, 我们有 (请同学们自己作图)

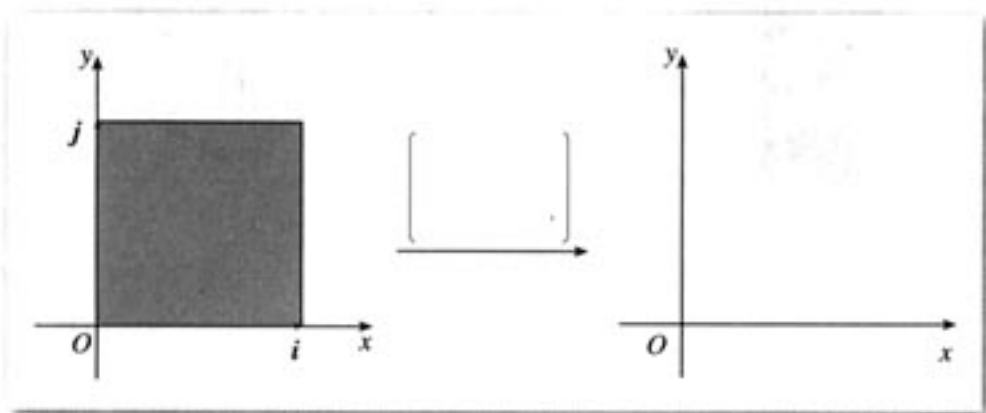


图 1.3-10

### 3. 切变变换

(1) 平行于  $x$  轴的切变变换, 对应的矩阵为  $A=\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 其中  $k$  是非零常数, 坐标变换公式为

$$\begin{cases} x'=x+ky, \\ y'=y. \end{cases}$$

令  $k=1$ , 则  $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 坐标变换公式为  $\begin{cases} x'=x+y, \\ y'=y. \end{cases}$

因为

$$Ai = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Aj = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以, 我们有

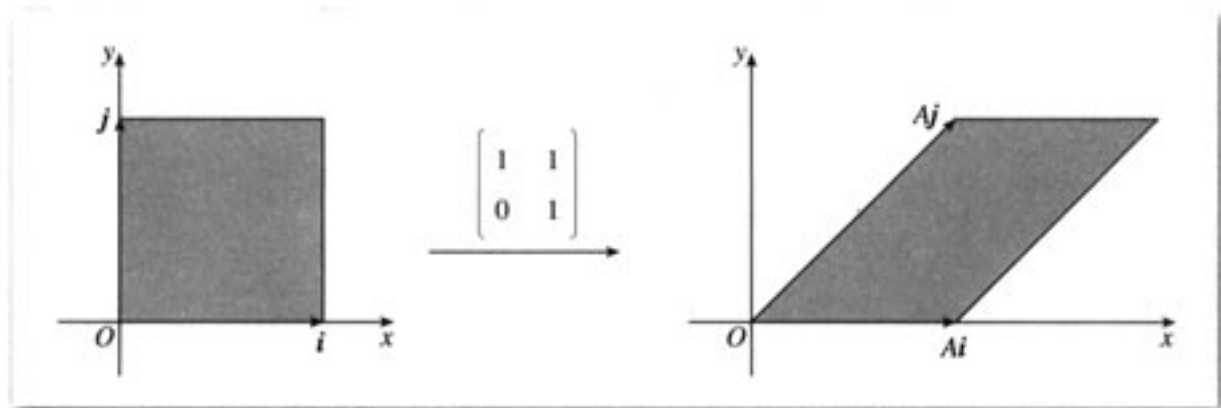


图 1.3-11

令  $k = -\frac{1}{2}$ , 则  $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 坐标变换公式为

$$\begin{cases} x' = \underline{\hspace{2cm}}, \\ y' = \underline{\hspace{2cm}}. \end{cases}$$

因为

$$Ai = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix},$$

$$Aj = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix},$$

所以, 我们有 (请同学们自己作图)

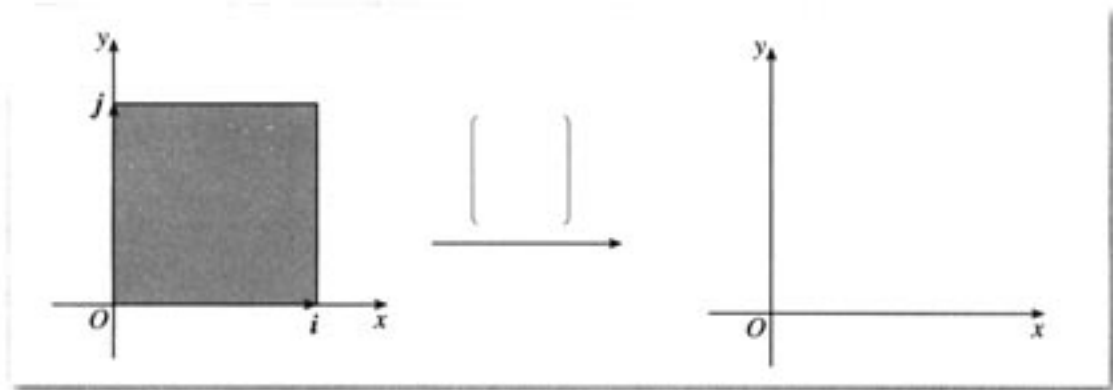


图 1.3-12

(2) 平行于  $y$  轴的切变变换, 对应的矩阵为  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ , 其中  $k$  是非零常数, 坐标变

换公式为



$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = kx + y. \end{cases}$$

令  $k=1$ , 则  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 坐标变换公式为

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = x + y. \end{cases}$$

因为

$$Ai = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$Aj = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

所以, 我们有

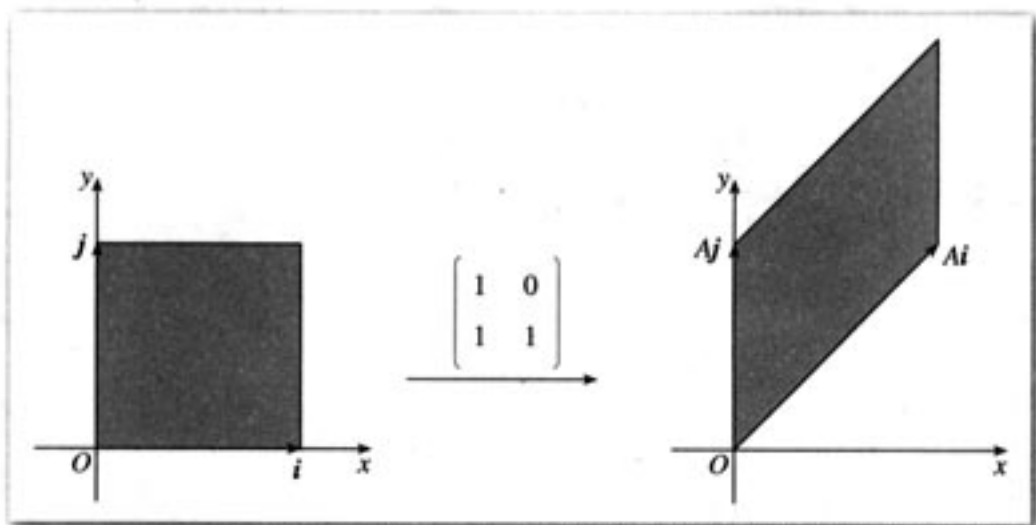


图 1.3-13

令  $k=-\frac{1}{2}$ , 则  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ , 坐标变换公式为

$$\begin{cases} x' = \underline{\hspace{2cm}}, \\ y' = \underline{\hspace{2cm}}. \end{cases}$$

因为

$$Ai = \begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix},$$

$$Aj = \begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix},$$

所以, 我们有 (请同学们自己作图)

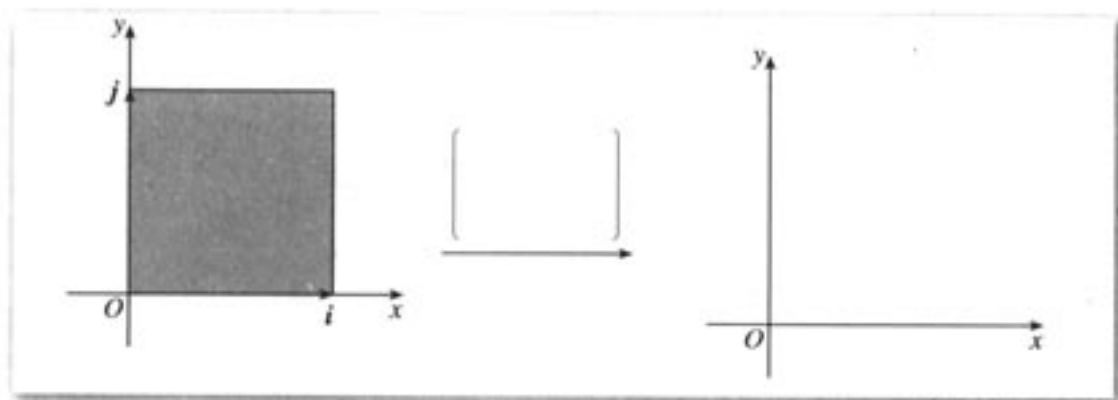


图 1.3-14

## 4. 反射变换

(1) 关于  $x$  轴的反射变换, 对应的矩阵为  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ , 坐标变换公式为

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases}$$

因为

$$Ai = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Aj = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

所以, 我们有

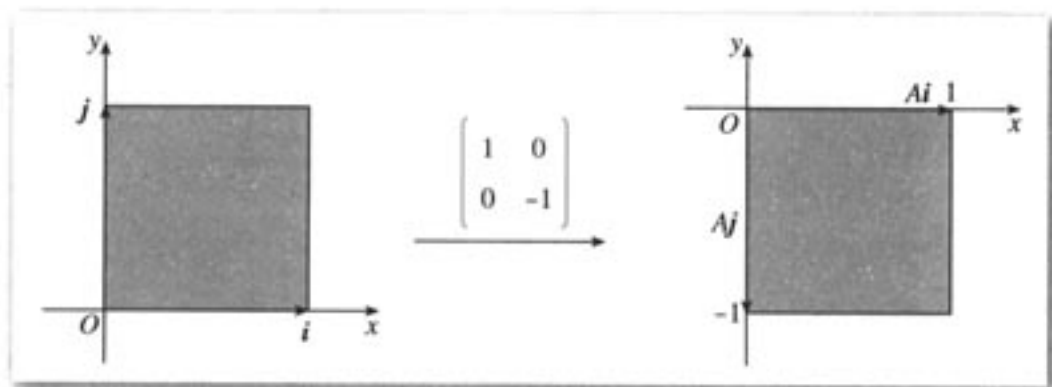


图 1.3-15

(2) 关于  $y$  轴的反射变换, 对应的矩阵为  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 坐标变换公式为

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = y. \end{cases}$$

因为

$$Ai = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$Aj = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

所以, 我们有

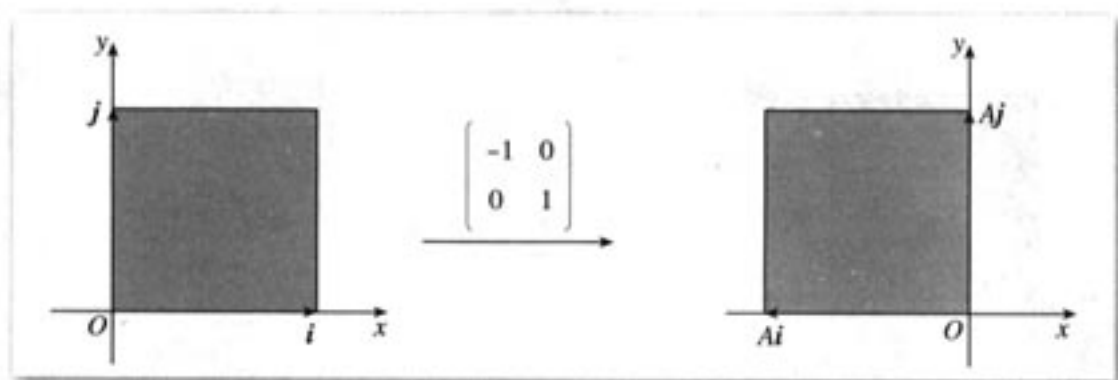


图 1.3-16

## 5. 投影变换

(1) 关于  $x$  轴的正投影变换, 对应的矩阵为  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 坐标变换公式为  $\begin{cases} x' = x, \\ y' = 0. \end{cases}$

因为

$$Ai = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Aj = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

所以, 我们有

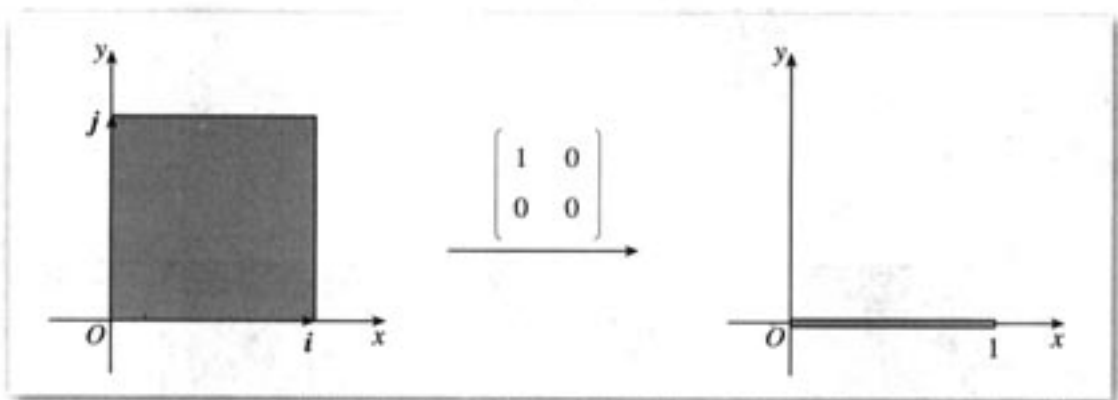


图 1.3-17

(2) 关于  $y$  轴的正投影变换, 对应的矩阵为  $A = \begin{pmatrix} \quad & 0 \\ \quad & 1 \end{pmatrix}$ , 坐标变换公式为

$$\begin{cases} x' = \underline{\hspace{2cm}}, \\ y' = \underline{\hspace{2cm}}. \end{cases}$$

因为

$$Ai = \begin{pmatrix} \quad & 0 \\ \quad & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Aj = \begin{pmatrix} \quad & 0 \\ \quad & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以, 我们有 (请同学们自己作图)

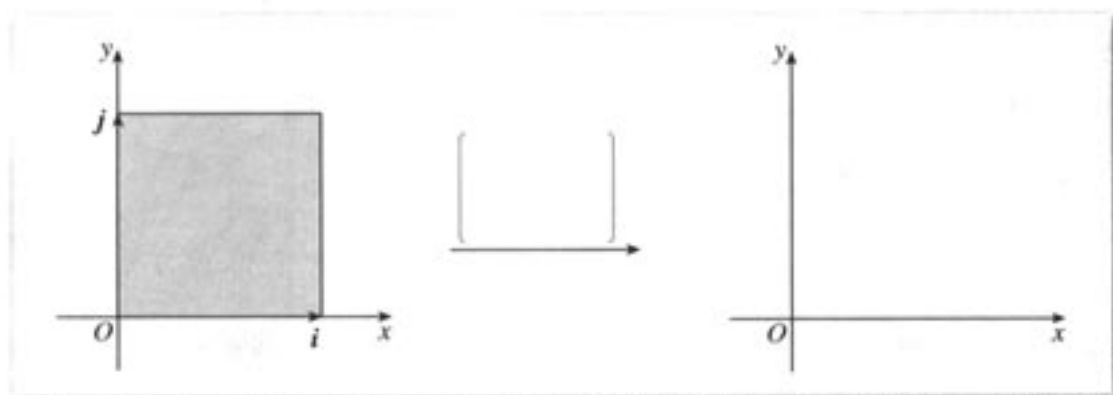


图 1.3-18

## 思考

1. 上面的两个投影变换都把单位正方形区域变成了线段. 你能从几何直观上说明原因吗?

2. 你能类比上面讨论线性变换对单位正方形区域的作用的过程, 证明关于  $x$  轴的对称变换、旋转变换把直角坐标系  $xOy$  内的三角形区域变为三角形区域吗?

## 习题 1.3

1. 矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  对应的线性变换把直线  $y=x-2$  变成什么?

2. 过点  $M_0(x_0, y_0)$  且平行于向量  $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$  的直线  $l$  的向量方程为:  $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM_0} + tv$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , 即

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

其中  $X(x, y)$  是直线上的任意一点.

试利用直线的向量方程来求解下列问题:

(1) 直线  $l$  经过点  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 2)$ , 考察矩阵  $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  对应的切变变换把直线  $l$  变成了什么?

(2) 直线  $l$  过点  $A(2, 1)$  且垂直于  $x$  轴, 考察矩阵  $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  对应的投影变换把直线  $l$  变成了什么?

3. 已知平面上的三点  $A(1, 1)$ ,  $B(1, 2)$ ,  $C(2, 1)$ , 在矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  对应的线性变换的作用下, 问

(1) 直线  $AB$  变成了什么图形? 画出图形.

(2) 直线  $BC$  变成了什么图形? 画出图形.

(3)  $\triangle ABC$  变成了什么图形? 画出图形.

4. 设  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ , 问矩阵  $A$  所对应的线性变换把平面上单位正方形区域  $x_1 i + x_2 j$ ,

其中  $0 \leq x_1, x_2 \leq 1$  (如图 1.3-5 所示) 变成了什么图形? 并画出图形.

5. 把矩阵  $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$  对应的线性变换作用在双曲线  $xy=1$  上, 试写出所得曲线的方程, 并

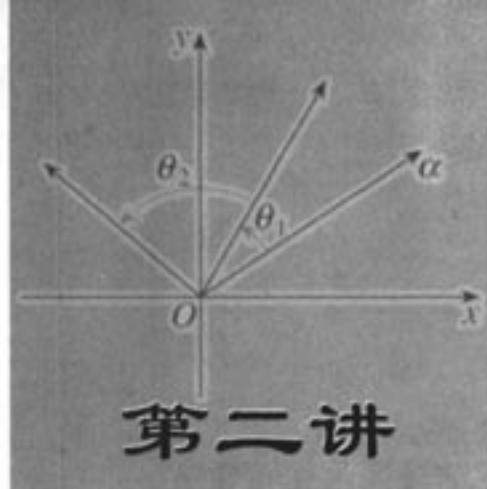
画出图形.

6. 已知直角坐标系  $xOy$  内的单位圆  $x^2 + y^2 = 1$ , 分别把下列矩阵:

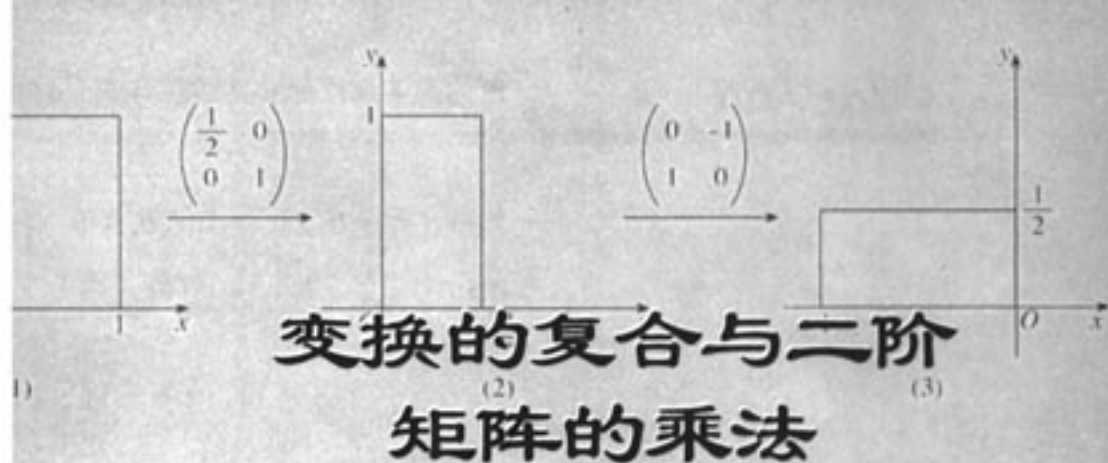
(1)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ; (2)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ; (3)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

对应的线性变换作用在该单位圆上, 试分别写出所得曲线的方程, 并画出图形.





## 第二讲



## 变换的复合与二阶矩阵的乘法

在上一讲中，我们学习了二阶矩阵与平面向量的乘法运算，并用二阶矩阵和向量的乘积表示线性变换。在那里矩阵与向量的乘法起了非常重要的作用。本讲中，将通过考察线性变换的复合，引进二阶矩阵的一种重要运算——矩阵的乘法，并研究矩阵乘法的运算律。

### 一 复合变换与二阶矩阵的乘法

#### 探究

在直角坐标系  $xOy$  内，连续施行两次线性变换，其作用效果是否能用一个变换表示？是否存在一个二阶矩阵与这个新变换对应？如果存在，这个二阶矩阵与原来的两个线性变换的二阶矩阵有什么关系？

为了方便同学们理解，我们先从具体例子入手考察。

例 1 在直角坐标系  $xOy$  内，二阶矩阵

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix}$$

与

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix}$$

对应的线性变换分别为旋转变换  $R_{\theta_1}$ ,  $R_{\theta_2}$ 。对平面上的任

意一个向量  $\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ，依次作旋转变换  $R_{\theta_1}$  和  $R_{\theta_2}$ （如图 2.1-1-

1），可以看出，作用的效果可以用一个变换  $R_{\theta_1+\theta_2}$  来表示。旋转变换  $R_{\theta_1+\theta_2}$  仍然是线性变换，对应的矩阵为

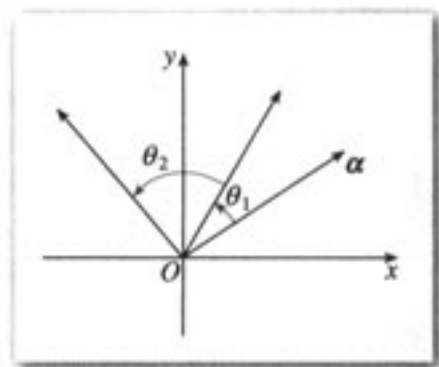


图 2.1-1

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}.$$

例 2 在直角坐标系  $xOy$  内, 由矩阵  $B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$  确定的变换是旋转变换

$$R_{30^\circ}: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

由矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  确定的变换是切变变换

$$\rho: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(1) 求向量  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  先经过旋转变换  $R_{30^\circ}$  作用, 再经过切变变换  $\rho$  作用的结果;

(2) 把任意一个平面向量  $\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  先经过旋转变换  $R_{30^\circ}$  作用, 再经过切变变换  $\rho$  作用,

最终变成向量  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ , 求向量  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ .

解: (1) 因为

$$R_{30^\circ} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned} \rho(R_{30^\circ} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 因为

$$R_{30^\circ} \alpha = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \rho(R_{30^\circ} \alpha) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{1}{2})x + (1 \times (-\frac{1}{2}) + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2})y \\ (0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \times \frac{1}{2})x + (0 \times (-\frac{1}{2}) + 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2})y \end{bmatrix}.$$

由于

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{1}{2})x + (1 \times (-\frac{1}{2}) + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2})y \\ (0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \times \frac{1}{2})x + (0 \times (-\frac{1}{2}) + 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2})y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{1}{2} & 1 \times (-\frac{1}{2}) + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \times \frac{1}{2} & 0 \times (-\frac{1}{2}) + 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

因此, 连续施行线性变换  $R_{30^\circ}$  和  $\rho$ , 作用效果可以用线性变换

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{1}{2} & 1 \times (-\frac{1}{2}) + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \times \frac{1}{2} & 0 \times (-\frac{1}{2}) + 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

来表示. 记这个线性变换为  $\rho \cdot R_{30^\circ}$ , 其对应的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{1}{2} & 1 \times (-\frac{1}{2}) + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \times \frac{1}{2} & 0 \times (-\frac{1}{2}) + 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 & -\frac{1}{2} + \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

一般地, 设  $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ , 在直角坐标系  $xOy$  内, 它们所对应的线性

变换分别为

$$f: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

$$g: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

对平面上的任意一个向量  $\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  依次作变换  $g$  和  $f$ , 其作用效果为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= f(g \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = f(B \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 x + b_2 y \\ c_2 x + d_2 y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a_1 a_2 + b_1 c_2)x + (a_1 b_2 + b_1 d_2)y \\ (c_1 a_2 + d_1 c_2)x + (c_1 b_2 + d_1 d_2)y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad ①$$

这也是一个线性变换,我们称它为变换  $g$  与变换  $f$  的复合变换 (composite transformation), 记为  $f \cdot g$ ①. 从而, 对任意平面向量  $\alpha$  有

$$(f \cdot g)\alpha = f(g\alpha).$$

由①式知, 上述复合变换  $f \cdot g$  对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{pmatrix},$$

称这个二阶矩阵为矩阵  $A$  与  $B$  的乘积 (product), 记为  $AB$ , 即

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

这样就定义了二阶矩阵的乘法.

从线性变换上看,  $AB$  是线性变换

$$g: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

与线性变换

$$f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

的复合变换  $f \cdot g$  的矩阵, 矩阵乘积  $AB$  的次序与对应的复合变换  $f \cdot g$  的复合次序相同. 从而, 对直角坐标系  $xOy$  内的任意向量  $\alpha$ , 有

$$A(B\alpha) = (AB)\alpha,$$

如图 2.1-2 所示.

对于例 2 中的两个矩阵, 由矩阵乘积的定义得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{1}{2} & 1 \times (-\frac{1}{2}) + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \times \frac{1}{2} & 0 \times (-\frac{1}{2}) + 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 & -\frac{1}{2} + \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

与例 2 的结果相吻合. 所以我们可以直接通过矩阵相乘得到复合变换  $\rho \cdot R_{30^\circ}$  所对应的矩阵.

① 在进行线性变换的复合时, 要特别注意复合的顺序: 先施行变换  $g$ , 再施行变换  $f$ , 它们的复合变换记为  $f \cdot g$  而不记为  $g \cdot f$ .

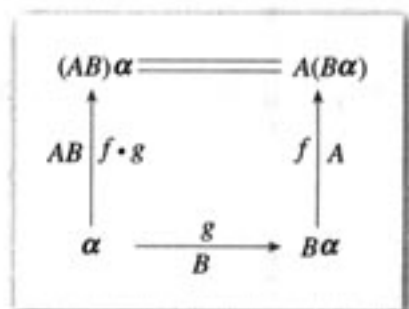


图 2.1-2

## 思考

你能用矩阵的乘积证明下面的等式吗?

$$\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}.$$

例3 计算

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}; (2) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{解: (1)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 1 \times (-2) & 1 \times (-1) + 1 \times 3 \\ 0 \times 1 + 1 \times (-2) & 0 \times (-1) + 1 \times 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \times 0 + 2 \times 1 & 1 \times 1 + 2 \times 0 \\ 3 \times 0 + 4 \times 1 & 3 \times 1 + 4 \times 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

例4 在直角坐标系  $xOy$  中, 切变变换  $\sigma$  对应的矩阵为  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ , 切变变换  $\rho$  对应的矩阵为  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 变换  $\sigma \cdot \rho$  将向量  $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  变成向量  $\beta$ , 求  $AB$  及  $\beta$ .

$$\begin{aligned} \text{解: } AB &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 0 & 1 \times 2 + 0 \times 1 \\ (-1) \times 1 + 1 \times 0 & (-1) \times 2 + 1 \times 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= (AB)\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

例5 在直角坐标系  $xOy$  中, 把矩阵  $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  确定的压缩变换

$$\sigma: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$



与矩阵  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  确定的旋转变换

$$R_{90^\circ}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

进行复合, 得到复合变换  $R_{90^\circ} \cdot \sigma$ .

- (1) 求向量  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  在复合变换  $R_{90^\circ} \cdot \sigma$  作用下的像;
- (2) 求复合变换  $R_{90^\circ} \cdot \sigma$  的坐标变换公式.
- (3) 复合变换  $R_{90^\circ} \cdot \sigma$  把单位正方形区域变成了什么图形?

$$\begin{aligned} \text{解: (1) } (R_{90^\circ} \cdot \sigma) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- (2) 设  $\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  是平面  $xOy$  上的任意一个向量, 它在压缩变换的作用下变为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x \\ y \end{bmatrix},$$

再经过旋转变换的作用变为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \times \frac{1}{2}x + (-1) \times y \\ 1 \times \frac{1}{2}x + 0 \times y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -y \\ \frac{1}{2}x \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

记  $x' = x''$ ,  $y' = y''$ , 则该复合变换的坐标变换公式为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= A(B\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left[ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 0 \times \frac{1}{2} + (-1) \times 0 & 0 \times 0 + (-1) \times 1 \\ 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 0 \times 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

即

$$R_{90^\circ} \cdot \sigma: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(3) 由复合变换  $R_{90^\circ} \cdot \sigma$  的坐标变换公式知,  $R_{90^\circ} \cdot \sigma$  是一个线性变换. 因此, 只需求出单位坐标向量  $i, j$  在线性变换  $R_{90^\circ} \cdot \sigma$  作用下的结果, 就能得到单位正方形区域在线性变换  $R_{90^\circ} \cdot \sigma$  作用下所变成的图形. 因为

$$\sigma i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma j = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以

$$(R_{90^\circ} \cdot \sigma)i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$(R_{90^\circ} \cdot \sigma)j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

从而, 我们有

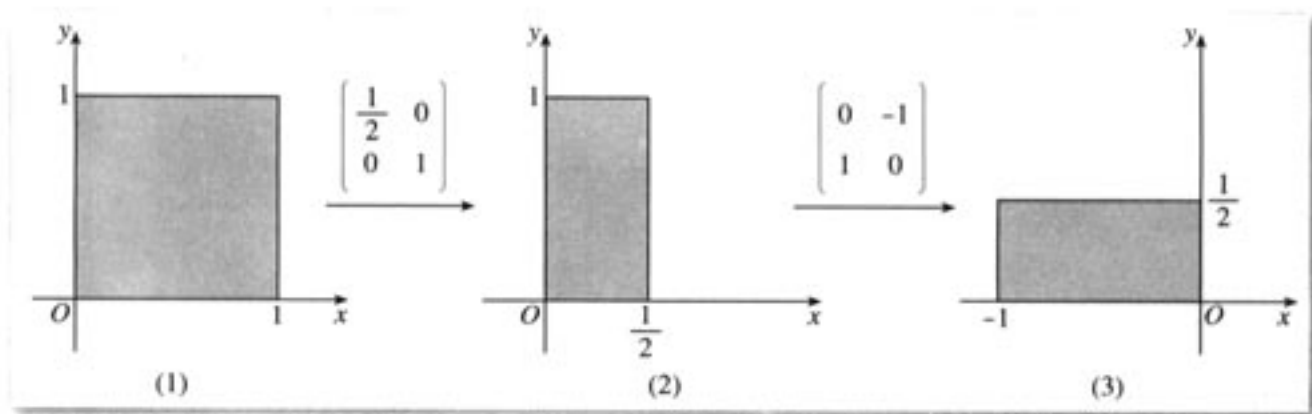


图 2.1-3

### 习题 2.1

1. 计算下列矩阵的乘积:

(1)  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

(2)  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

(3)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix};$

(4)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$

2. 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 求  $AB$  与  $BA$ . 在直角坐标系  $xOy$  内, 分别写出矩阵  $AB$ ,  $BA$  所对应的线性变换的坐标变换公式.

3. 已知旋转变换  $R_{30^\circ}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  与切变变换  $\rho: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ .

- (1) 求单位坐标向量  $i, j$  在复合变换  $\rho \cdot R_{30^\circ}$  作用下的像.  
 (2) 复合变换  $\rho \cdot R_{30^\circ}$  把直角坐标系  $xOy$  内单位正方形区域 (如图 2.1-3(1)) 变成了什么图形?  
 4. 请你分别从第一讲第三节中的图 1.3-7 至图 1.3-18 出发, 再分别选择一个线性变换, 作用在这些平面区域上, 画出最终得到的平面区域.

5. 设  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  (其中  $a, b, c, d$  均为常数), 当  $B$  分别为下列矩阵时, 试求  $AB, BA$ .

(1)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,

(2)  $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  (其中  $k$  为非零常数),

(3)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$  (其中  $k$  为非零常数),

(4)  $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  (其中  $k$  为非零常数).

## 二 矩阵乘法的性质

我们知道, 实数的乘法运算满足一定的运算律, 即对于实数  $a, b, c$ , 有结合律:  $(ab)c = a(bc)$ ; 交换律:  $ab = ba$ ; 消去律: 设  $a \neq 0$ , 如果  $ab = ac$ , 那么  $b = c$ ; 如果  $ba = ca$ , 那么  $b = c$ .

### 探究

类比实数乘法的运算律, 二阶矩阵的乘法是否也满足某些运算律?

首先考察矩阵的乘法是否满足结合律.

例如, 对于矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , 可以得到:

$$\begin{aligned}
 (AB)C &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \\
 A(BC) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

于是有  $(AB)C=A(BC)$ .

一般地, 设二阶矩阵

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \\
 B &= \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}, \\
 C &= \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

一方面,

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
 (AB)C &= \begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_1a_2a_3+b_1c_2a_3+a_1b_2c_3+b_1d_2c_3 & a_1a_2b_3+b_1c_2b_3+a_1b_2d_3+b_1d_2d_3 \\ c_1a_2a_3+d_1c_2a_3+c_1b_2c_3+d_1d_2c_3 & c_1a_2b_3+d_1c_2b_3+c_1b_2d_3+d_1d_2d_3 \end{pmatrix};
 \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
 BC &= \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_2a_3+b_2c_3 & a_2b_3+b_2d_3 \\ c_2a_3+d_2c_3 & c_2b_3+d_2d_3 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
 A(BC) &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2a_3+b_2c_3 & a_2b_3+b_2d_3 \\ c_2a_3+d_2c_3 & c_2b_3+d_2d_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_1a_2a_3+a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+b_1d_2c_3 & a_1a_2b_3+a_1b_2d_3+b_1c_2b_3+b_1d_2d_3 \\ c_1a_2a_3+c_1b_2c_3+d_1c_2a_3+d_1d_2c_3 & c_1a_2b_3+c_1b_2d_3+d_1c_2b_3+d_1d_2d_3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

因此

$$(AB)C=A(BC).$$

所以,二阶矩阵的乘法满足结合律.即

**性质(结合律)** 设  $A, B, C$  是任意的三个二阶矩阵,则  $A(BC)=(AB)C$ .

设  $A$  是二阶矩阵,  $n$  是任意自然数,规定

$$A^0=E_2,$$

$$A^1=A,$$

$$A^2=AA^1,$$

$$A^3=AA^2,$$

$$\dots\dots$$

$$A^n=AA^{n-1},$$

称  $A^n$  为  $A$  的  $n$  次方幂.

根据矩阵乘法的结合律可以证明,二阶矩阵  $A$  的方幂具有如下性质:

$$A^k A^l = A^{k+l},$$

$$(A^k)^l = A^{kl},$$

其中  $k, l$  是任意自然数.

**例 1** 设  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 求  $A^6$ .

**解法一(根据定义)**

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^5 = A \cdot A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^6 = A \cdot A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**解法二(根据定义以及方幂的性质)**

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A^6 = A^3 A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

这个例子让我们初步感受到了运算律的威力.

下面考察二阶矩阵的乘法是否满足交换律. 我们从某些具体的二阶矩阵所对应的线性变换对平面图形的作用效果入手. 例如: 矩阵  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  确定的是伸缩变换

$$\sigma: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

矩阵  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  确定的是旋转变换

$$R_{90^\circ}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

变换  $R_{90^\circ} \cdot \sigma$  对单位正方形区域的作用结果如图 2.2-1 所示; 变换  $\sigma \cdot R_{90^\circ}$  对单位正方形区域的作用结果如图 2.2-2 所示.

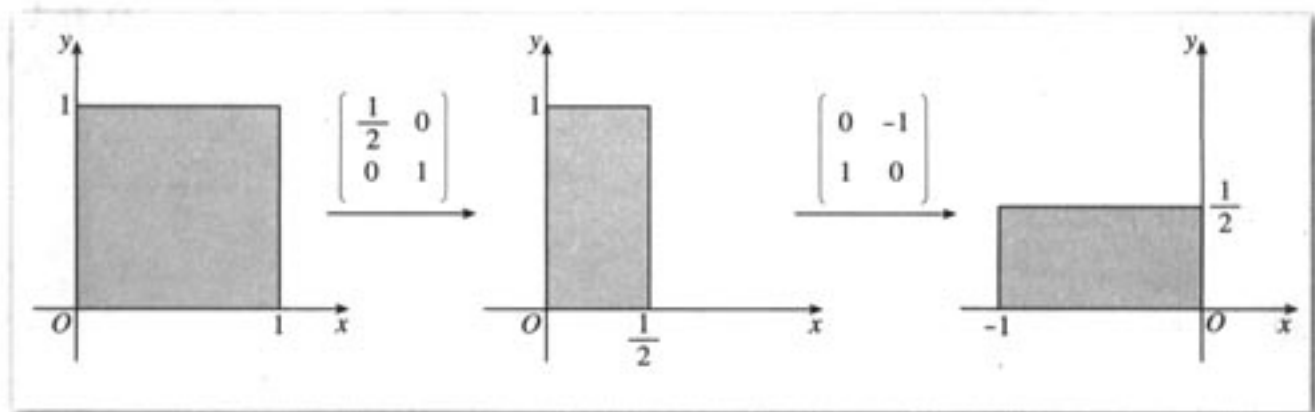


图 2.2-1

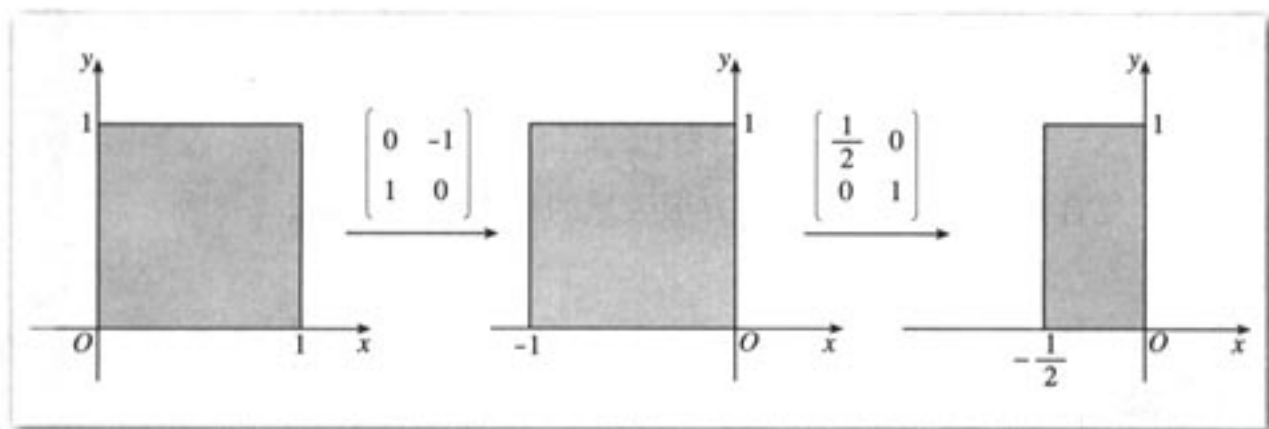


图 2.2-2

比较图 2.2-1 与图 2.2-2, 可以看到  $\sigma \cdot R_{90^\circ} \neq R_{90^\circ} \cdot \sigma$ . 由于二阶矩阵与线性变换是一一对应的, 因此有

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

实际上, 对于矩阵  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , 通过直接计算也可以得到这个结果:



$$AB = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

于是  $AB \neq BA$ .

所以, 我们有结论: 矩阵的乘法不满足交换律<sup>①</sup>.

最后, 考察二阶矩阵的乘法是否满足消去律. 我们也从具体线性变换入手. 例如:

设  $I$  表示由单位矩阵  $E_2$  确定的恒等变换;

矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$  确定的是伸缩变换

$$\rho: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix};$$

矩阵  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  确定的是投影变换

$$\sigma: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

可以得到, 复合变换  $\sigma \cdot I$  对单位正方形区域的作用结果如图 2.2-3 所示:

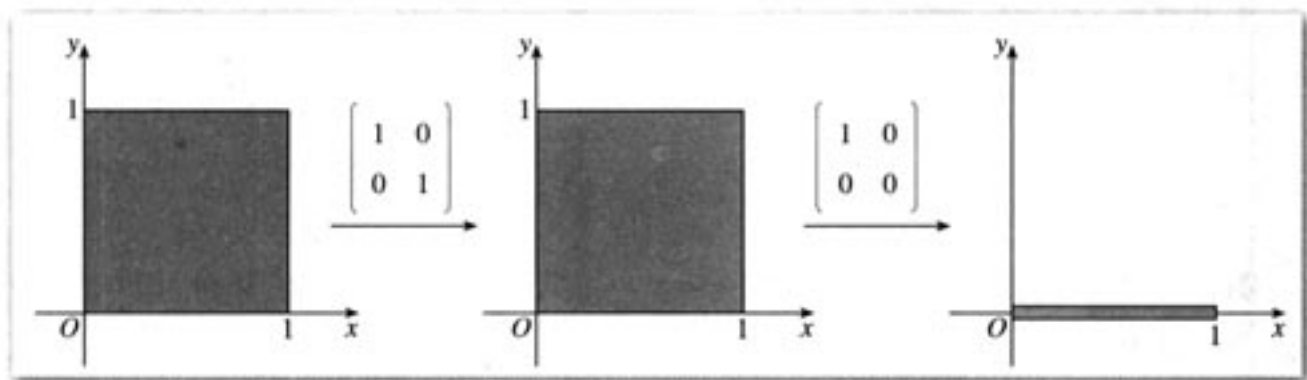


图 2.2-3

复合变换  $\sigma \cdot \rho$  对单位正方形区域的作用结果如图 2.2-4 所示:

① 对某些矩阵  $A, B$ , 也可能有  $AB=BA$ .

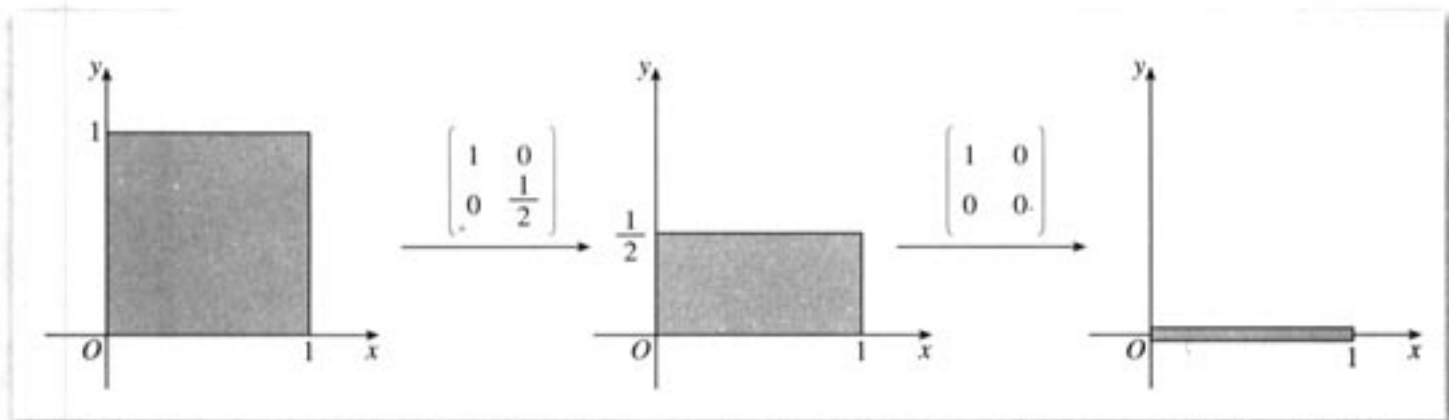


图 2.2-4

于是,  $\sigma \cdot I$  与  $\sigma \cdot \rho$  对单位正方形区域的作用结果相同.

事实上, 不难证明

$$\sigma \cdot I = \sigma \cdot \rho^{\text{①}}.$$

从而,  $BE_2 = BA$ , 但  $E_2 \neq A$ .

类似地, 可以得到,  $E_2 B = AB$ , 但  $E_2 \neq A$ .

所以, 我们有结论: 矩阵的乘法不满足消去律.

综上所述, 矩阵的乘法运算满足结合律, 但不满足交换律和消去律.

我们知道, 对任意实数  $a$ ,  $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ . 二阶矩阵中,  $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  也有相当于实数

1 的作用:

设  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  是任意的二阶矩阵, 则

$$\begin{aligned} E_2 A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \\ AE_2 &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

从而  $E_2 A = AE_2 = A$ .

正是  $E_2$  在二阶矩阵的乘法运算中扮演这样的角色, 所以我们称  $E_2$  为二阶单位矩阵.

① 你能证明  
这个等式吗?

### 习题 2.2



1. 设  $\rho, \sigma, \tau$  是同一个平面上的任意三个变换, 试证明  $\rho \cdot (\sigma \cdot \tau) = (\rho \cdot \sigma) \cdot \tau$  (变换的结合律).
2.  $I$  表示恒等变换, 设  $\rho, \sigma$  分别表示伸缩变换

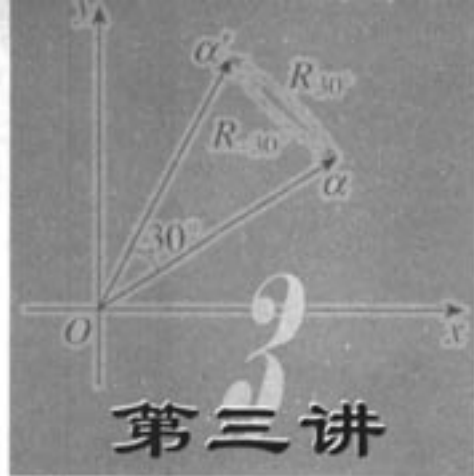
$$\rho: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

和投影变换

$$\sigma: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

证明等式  $\sigma \cdot I = \sigma \cdot \rho$  成立.

3. 从你学过的线性变换中, 再举一个例子, 说明矩阵的乘法不满足交换律.
4. 从你学过的线性变换中, 再举一个例子, 说明矩阵的乘法不满足消去律.
5. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 证明  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ .



### 第三讲

$$B_1 A = A B_1 = E_2$$

$$\Rightarrow B_1 = B_2$$

$$A^{-1} A = A A^{-1} = E_2$$

## 逆变换与逆矩阵

上一讲我们引进了矩阵的乘法，研究了矩阵乘法的一些性质，结合矩阵的乘法，是否还可以研究矩阵的其他性质呢？例如，在实数的乘法运算中，如果  $a \neq 0$ ，则  $\frac{1}{a} \cdot a = a \cdot \frac{1}{a} = 1$ 。我们可以分别把恒等变换  $I$  和单位矩阵  $E_2$  作为数 1 的类比对象。那么，能否类比数的这个运算性质研究变换和矩阵呢？

本讲将通过线性变换引进逆矩阵，理解逆矩阵的性质，并进一步引入二阶行列式研究逆矩阵。本讲还将从线性变换的角度来认识解二元一次方程组的意义，并利用逆矩阵求解一类特殊的二元一次方程组。

### 一 逆变换与逆矩阵

#### 1. 逆变换与逆矩阵

#### 探究

对于一个线性变换  $\rho$ ，是否存在一个线性变换  $\sigma$ ，使得  $\sigma \cdot \rho = \rho \cdot \sigma = I$ ？对于一个二阶矩阵  $A$ ，是否存在一个二阶矩阵  $B$ ，使得  $BA = AB = E_2$ ？

我们知道，在取定的平面直角坐标系中，矩阵与线性变换是一一对应的，下面先从一些特殊的矩阵所对应的线性变换入手进行探究。

#### 例 1 旋转变换

$$R_{30^\circ}: \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$$

把直角坐标系  $xOy$  内的任意一个向量  $\alpha$  沿逆时针方向绕原点旋转  $30^\circ$ ，设  $R_{30^\circ} \alpha = \alpha'$ ；如果再进行一次旋转变换

$$R_{-30^\circ}: \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, \\ y' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \end{cases}$$

即把直角坐标系  $xOy$  内的每个向量沿顺时针方向绕原点再旋转  $30^\circ$ , 这样向量  $\alpha'$  在  $R_{-30^\circ}$  的作用下又变回到  $\alpha$ . 因此, 对直角坐标系  $xOy$  内的任意一个向量  $\alpha$ , 均有

$$(R_{-30^\circ} \cdot R_{30^\circ})\alpha = R_{-30^\circ}(R_{30^\circ}\alpha) = \alpha,$$

即复合变换  $R_{-30^\circ} \cdot R_{30^\circ}$  使得每个平面向量  $\alpha$  保持不动, 从而  $R_{-30^\circ} \cdot R_{30^\circ} = I$ .

类似地, 可以发现, 对直角坐标系  $xOy$  内的任意一个向量  $\alpha$ , 也有

$$(R_{30^\circ} \cdot R_{-30^\circ})\alpha = R_{30^\circ}(R_{-30^\circ}\alpha) = \alpha,$$

从而  $R_{30^\circ} \cdot R_{-30^\circ} = I$ .

综上所述, 对旋转变换  $R_{30^\circ}$ , 我们找到了一个变换  $R_{-30^\circ}$ , 使得

$$R_{-30^\circ} \cdot R_{30^\circ} = R_{30^\circ} \cdot R_{-30^\circ} = I. \quad \textcircled{1}$$

从图 3.1-1 中也可以直观地看出等式①成立.

旋转变换  $R_{30^\circ}$ ,  $R_{-30^\circ}$  和恒等变换对应的二阶矩阵分别为

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \text{ 和 } E_2. \text{ 根据矩阵与线性变换的对应关}$$

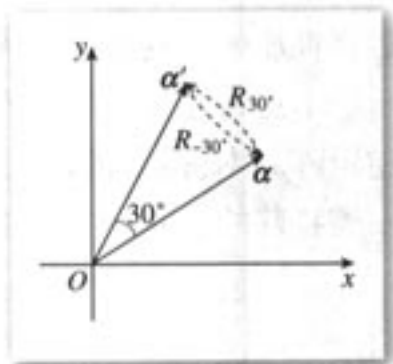


图 3.1-1

系, 把上面的结论用矩阵的语言叙述为:

$$\begin{aligned} \text{对于二阶矩阵 } \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \text{ 存在二阶矩阵 } \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \text{ 使得} \\ \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = E_2. \end{aligned} \quad \textcircled{2}$$

### 思考

对一般的旋转变换  $R_\varphi$ , 也有类似的结论吗?

### 例 2 切变变换

$$\rho: \begin{cases} x' = x + ky, \\ y' = 0x + y \end{cases} \quad (\text{其中 } k \text{ 是非零常数})$$

把直角坐标系  $xOy$  内的任意一个向量  $\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  变成  $\alpha' = \begin{bmatrix} x+ky \\ y \end{bmatrix}$ ; 对  $\alpha' = \begin{bmatrix} x+ky \\ y \end{bmatrix}$  再进行一次切变变换

$$\sigma: \begin{cases} x' = x - ky, \\ y' = 0x + y, \end{cases}$$

则  $\alpha' = \begin{bmatrix} x+ky \\ y \end{bmatrix}$  变为  $\begin{bmatrix} x+ky-ky \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ , 即变回到  $\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ . 因此, 对直角坐标系  $xOy$  内的任意一个向量  $\alpha$ , 均有

$$(\sigma \cdot \rho)\alpha = \sigma(\rho\alpha) = \alpha,$$

可以发现, 对直角坐标系  $xOy$  内的任意一个向量  $\alpha$ , 也有

$$(\rho \cdot \sigma)\alpha = \rho(\sigma\alpha) = \alpha,$$

从而, 对切变变换  $\rho$ , 我们找到了另一个切变变换  $\sigma$ , 使得

$$\sigma \cdot \rho = \rho \cdot \sigma = I. \quad ③$$

切变变换  $\rho, \sigma$  和恒等变换对应的二阶矩阵分别为  $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  和  $E_2$ . 根据矩阵与线性变换的对应关系, 把上面的结论用矩阵的语言叙述为:

对于二阶矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 存在二阶矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 使得

$$\begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2. \quad ④$$

### 思考

对于另一类切变变换、伸缩变换和反射变换等线性变换, 能否找到一个线性变换, 使得它们的复合变换是恒等变换  $I$  呢?

一般地, 设  $\rho$  是一个线性变换, 如果存在线性变换  $\sigma$ , 使得  $\sigma\rho = \rho\sigma = I$ , 则称变换  $\rho$  可逆 (invertible), 并且称  $\sigma$  是  $\rho$  的逆变换.

用矩阵的语言叙述为:

设  $A$  是一个二阶矩阵, 如果存在二阶矩阵  $B$ , 使得

$$BA = AB = E_2,$$

则称矩阵  $A$  可逆, 或称矩阵  $A$  是可逆矩阵, 并且称  $B$  是  $A$  的逆矩阵.

由①②知, 旋转变换  $R_{30^\circ}$  是可逆变换, 且逆变换为旋转变换  $R_{-30^\circ}$ ; 旋转变换矩阵

$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$  是可逆的, 且逆矩阵为  $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ , 这个逆矩阵恰好是旋转变换  $R_{30^\circ}$  的逆变换



$R_{-30^\circ}$  所对应的矩阵. 由③④知, 切变变换

$$\rho: \begin{cases} x' = x + ky, \\ y' = 0x + y \end{cases} \quad (\text{其中 } k \text{ 是非零常数})$$

是可逆变换, 且逆变换为切变变换

$$\sigma: \begin{cases} x' = x - ky, \\ y' = 0x + y; \end{cases}$$

切变变换  $\rho$  的矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  是可逆的, 其逆矩阵为  $\begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 这个逆矩阵恰好是切变变换  $\rho$  的逆变换  $\sigma$  所对应的矩阵.

一般地, 设  $A$  是一个二阶可逆矩阵, 对应的线性变换为  $\rho$ , 由矩阵与线性变换的对应关系可以看出,  $A$  的逆矩阵就是  $\rho$  的逆变换所对应的矩阵.

### 思考

是否每个二阶矩阵都可逆呢?

不难发现, 投影变换  $\rho: \begin{cases} x' = x, \\ y' = 0. \end{cases}$  把直线  $x=1$  变成点  $(1, 0)$ , 特别地,

$$\rho \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\rho \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

如果存在线性变换  $\sigma$  使得

$$\sigma \cdot \rho = \rho \cdot \sigma = I,$$

由  $\rho \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , 得

$$\sigma \left( \rho \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \sigma \left( \rho \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \sigma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

从而

$$(\sigma \cdot \rho) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (\sigma \cdot \rho) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

再由  $\sigma \cdot \rho = I$  得  $I \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ , 即  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ , 矛盾!

因此, 不可能找到线性变换  $\sigma$ , 使得  $\sigma \cdot \rho = \rho \cdot \sigma = I$ . 即投影变换  $\rho$  不可逆. 把这个事实用矩阵的语言表述为:

对于二阶矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 找不到二阶矩阵  $B$ , 使得  $BA = AB = E_2$  成立. 即矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{不可逆.}$$

因此, 有些二阶矩阵是不可逆的.

### 思考

你能再举一个不可逆的二阶矩阵的例子吗?

## 2. 逆矩阵的性质

### 探究

如果一个线性变换是可逆的, 那么它的逆变换是唯一的吗? 如果一个矩阵是可逆的, 那么它的逆矩阵唯一吗?

对于旋转变换  $R_{30^\circ}$ , 我们知道  $R_{-30^\circ} \cdot R_{30^\circ} = R_{30^\circ} \cdot R_{-30^\circ} = I$ . 设  $\sigma$  是变换  $R_{30^\circ}$  的任意一个逆变换, 则  $\sigma \cdot R_{30^\circ} = R_{30^\circ} \cdot \sigma = I$ . 对任意一个平面向量  $\alpha$ , 我们有

$$\begin{aligned} \sigma\alpha &= I(\sigma\alpha) = (R_{-30^\circ} \cdot R_{30^\circ})\sigma\alpha = R_{-30^\circ}(R_{30^\circ}(\sigma\alpha)) \\ &= R_{-30^\circ}((R_{30^\circ} \cdot \sigma)\alpha) = R_{-30^\circ}(I\alpha) = R_{-30^\circ}\alpha. \end{aligned}$$

因此,  $\sigma = R_{-30^\circ}$ . 即旋转变换  $R_{30^\circ}$  的逆变换是唯一的.

用矩阵的语言叙述为: 矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

的逆矩阵是唯一的.

一般地, 可逆的二阶矩阵的逆矩阵都是唯一的. 即

**性质 1** 设  $A$  是一个二阶矩阵, 如果  $A$  是可逆的, 则  $A$  的逆矩阵是唯一的<sup>①</sup>.

证明: 设  $B_1, B_2$  都是  $A$  的逆矩阵, 则

$$B_1A = AB_1 = E_2, \quad B_2A = AB_2 = E_2.$$

从而

$$B_1 = E_2B_1 = (B_2A)B_1 = B_2(AB_1) = B_2E_2 = B_2.$$

即  $B_1 = B_2$ .

由于可逆的二阶矩阵  $A$  的逆矩阵是唯一的, 我们把  $A$  的

<sup>①</sup> 性质 1 用线性变换的语言可叙述为: 如果二阶矩阵  $A$  所对应的线性变换  $\sigma$  是可逆的, 则其逆变换是唯一的.

逆矩阵记为  $A^{-1}$ , 读作  $A$  的逆矩阵或  $A$  的逆<sup>①</sup>. 从而

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E_2.$$

① 若线性变换  $\sigma$  是可逆的, 则记其逆变换为  $\sigma^{-1}$ , 读作  $\sigma$  的逆变换或  $\sigma$  的逆.

### 探究

设  $\rho, \sigma$  是两个可逆的线性变换, 那么它们的复合变换仍可逆吗?

我们知道, 伸缩变换

$$\rho: \begin{cases} x' = x, \\ y' = 2y \end{cases}$$

和旋转变换

$$R_{30^\circ}: \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y, \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$$

都是可逆线性变换, 它们的逆变换分别是伸缩变换

$$\rho^{-1}: \begin{cases} x' = x, \\ y' = \frac{1}{2}y \end{cases}$$

和旋转变换

$$R_{-30^\circ}: \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, \\ y' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y. \end{cases}$$

如图 3.1-2 所示, 任意一个平面向量  $\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ , 经过变换  $\rho$  的作用变成  $\begin{bmatrix} x \\ 2y \end{bmatrix}$ , 再经过变换

$R_{30^\circ}$  的作用变成  $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x - y \\ \frac{1}{2}x + \sqrt{3}y \end{bmatrix}$ . 从几何直观上可以看出, 向量  $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x - y \\ \frac{1}{2}x + \sqrt{3}y \end{bmatrix}$  经过变换  $R_{-30^\circ}$  的作

用变回到  $\begin{bmatrix} x \\ 2y \end{bmatrix}$ , 再经过变换  $\rho^{-1}$  的作用变回到  $\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ , 即

$$\rho^{-1}(R_{-30^\circ}(R_{30^\circ}(\rho\alpha))) = \alpha.$$

所以

$$((\rho^{-1} \cdot R_{-30^\circ}) \cdot (R_{30^\circ} \cdot \rho))\alpha = \alpha,$$

从而

$$(\rho^{-1} \cdot R_{-30^\circ}) \cdot (R_{30^\circ} \cdot \rho) = I;$$

类似地可得

$$(R_{30^\circ} \cdot \rho) \cdot (\rho^{-1} \cdot R_{-30^\circ}) = I.$$

因此

$$\begin{aligned} (R_{30^\circ} \cdot \rho) \cdot (\rho^{-1} R_{-30^\circ}) \\ = (\rho^{-1} \cdot R_{-30^\circ}) \cdot (R_{30^\circ} \cdot \rho) = I. \end{aligned}$$

即变换  $R_{30^\circ} \cdot \rho$  可逆, 且

$$(R_{30^\circ} \cdot \rho)^{-1} = \rho^{-1} \cdot R_{-30^\circ} = \rho^{-1} \cdot R_{30^\circ}^{-1}.$$

这个结论用矩阵的语言叙述为:

矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

是可逆的, 且

$$\left[ \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}^{-1}.$$

一般地, 我们有

**性质 2** 设  $A, B$  是二阶矩阵, 如果  $A, B$  都可逆, 则  $AB$  也可逆, 且  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

证明: 因为

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AE_2A^{-1} = AA^{-1} = E_2,$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}E_2B = B^{-1}B = E_2,$$

即

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = E_2,$$

所以,  $AB$  可逆且  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

性质 2 与我们熟悉的一些生活规律是类似的. 例如, 在穿衣服时, 我们总是先穿衬衣后穿外套; 而在脱衣服时, 我们会遵循正好相反的顺序, 先脱外套后脱衬衣. 如果把穿外套和穿衬衣分别用  $A, B$  表示, 那么  $AB$  就表示穿衣服的全过程,  $A^{-1}, B^{-1}$  就分别表示脱外套和脱衬衣,  $(AB)^{-1}$  就表示脱衣服的全过程. 自然地, 脱衣服的全过程也可表示为  $B^{-1}A^{-1}$ , 从而  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

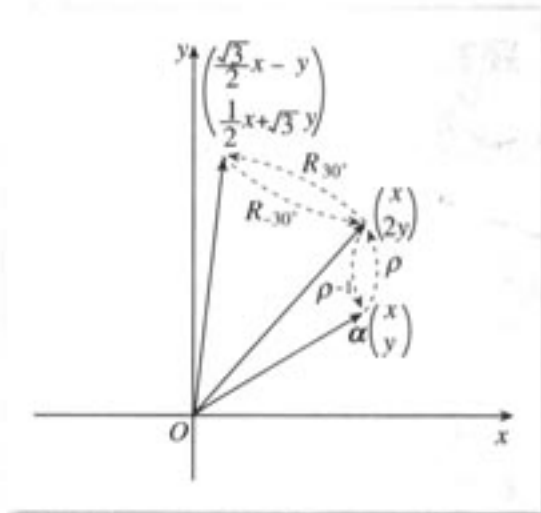


图 3.1-2



1. 试从几何直观上判别下列线性变换是否可逆? 若可逆求其逆变换.

(1) 伸缩变换  $\rho: \begin{cases} x' = x, \\ y' = ky \end{cases}$  (其中  $k$  是一个固定的非零常数);

(2) 关于  $x$  轴的反射变换  $\rho: \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases}$

2. 从线性变换的角度考虑下列矩阵是否可逆. 若可逆, 求其逆矩阵, 并用逆矩阵的定义进行验证.

(1)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ; (2)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ; (3)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ; (4)  $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ .

3. 如果一个线性变换是可逆的, 证明其逆变换是唯一的.

4. 设二阶矩阵  $A$  可逆, 证明:  $A^{-1}$  也可逆且  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

5. 设二阶矩阵  $A$  可逆, 证明:  $A^2$  也可逆且  $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ .

## 二 二阶行列式与逆矩阵

### 探究

我们知道, 二阶矩阵不一定可逆. 对任意给定的二阶矩阵  $A$ , 如何判别它是否可逆? 若可逆, 如何求其逆矩阵呢?

例 1 设  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ , 问  $A$  是否可逆? 如果可逆, 求其逆矩阵.

解: 假设  $A$  是可逆的, 并设它的逆矩阵是

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix},$$

那么应该有

$$BA = AB = E_2.$$

即

$$\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{①}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{②}$$

由①得

$$\begin{cases} 3x+4y=1, & \text{③} \\ x+2y=0, & \text{④} \\ 3u+4v=0, & \text{⑤} \\ u+2v=1. & \text{⑥} \end{cases}$$

④ $\times$ 3-③ $\times$ 1得

$$(3\times 2-4\times 1)y=-1,$$

从而  $y=-\frac{1}{2}$ ; 类似地可得  $x=1, u=-2, v=\frac{3}{2}$ .

把  $x=1, y=-\frac{1}{2}, u=-2, v=\frac{3}{2}$  代入②式, ②式也成立.

从而, 对矩阵  $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ , 我们找到了矩阵

$$B=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix},$$

使得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

因此, 矩阵  $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  是可逆的, 且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

例2 设  $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ , 问  $A$  是否可逆? 如果可逆, 求其逆矩阵.

解: 仿照例1的方法, 设  $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  是可逆的, 其逆矩阵  $B=\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$ , 那么应该有

$$BA=AB=E_2.$$

即

$$\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{①}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{②}$$



由①得

$$\begin{cases} 2x+4y=1, & \text{③} \\ x+2y=0, & \text{④} \\ 2u+4v=0, & \text{⑤} \\ u+2v=1. & \text{⑥} \end{cases}$$

④ $\times$ 3-③ $\times$ 1得

$$(2\times 2-4\times 1)y=-1,$$

即  $0y=-1$ , 这说明上面的方程组无解. 从而, 不存在矩阵  $B$  使得  $BA=AB=E_2$ . 所以,

矩阵  $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  不可逆.

仔细分析上面两个例子的解答过程可以发现, 由于在例 1 的方程组里, 前两个方程中  $x$  项的系数与  $y$  项的系数不对应成比例, 后两个方程中  $u$  项的系数与  $v$  项的系数也不对应成比例, 即  $\frac{3}{1}\neq\frac{4}{2}$ , 从而  $3\times 2-4\times 1\neq 0$ , 因此这个方程组有唯一的解. 所以, 矩阵  $A=$

$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  是可逆的. 而在例 2 的方程组里, 前两个方程中  $x$  项的系数与  $y$  项的系数对应成比例, 后两个方程中  $u$  项的系数与  $v$  项的系数也对应成比例, 均为  $\frac{2}{1}=\frac{4}{2}$ , 从而

$2\times 2-4\times 1=0$ , 因此这个方程组没有解. 所以, 矩阵  $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  不可逆.

对一般的二阶矩阵  $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , 是否也有类似的结论? 即是否有:

当  $ad-bc\neq 0$  时,  $A$  可逆; 当  $ad-bc=0$  时,  $A$  不可逆.

设矩阵  $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  是可逆的, 其逆矩阵为  $B=\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$ , 那么应该有

$$BA=AB=E_2.$$

即

$$\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{①}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{②}$$

由①得

$$\begin{cases} ax+cy=1, & \text{③} \\ bx+dy=0, & \text{④} \\ au+cv=0, & \text{⑤} \\ bu+dv=1. & \text{⑥} \end{cases}$$

即解两个二元一次方程组

$$\begin{cases} ax+cy=1, \\ bx+dy=0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} au+cv=0, \\ bu+dv=1. \end{cases}$$

由③④⑤⑥得

$$(ax+cy)(bu+dv) - (bx+dy)(au+cv) = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1,$$

整理并分解因式得

$$(ad-bc)(xv-uy)=1,$$

从而  $ad-bc \neq 0$ .

于是, 我们得到:

如果矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  是可逆的, 则  $ad-bc \neq 0$ .

表达式  $ad-bc$  称为二阶行列式 (determinant), 记作  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ , 即

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \text{ ①.}$$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  也称为二阶矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  的行列式, 记为  $\det A$  或  $|A|$ .

另一方面, 当  $\det A = ad-bc \neq 0$  时, 对上面的方程组利用加减消元法得

$$\begin{cases} (ad-bc)x=d, \\ (ad-bc)y=-b, \\ (ad-bc)u=-c, \\ (ad-bc)v=a; \end{cases}$$

从而, 方程①有唯一的解:

$$\begin{cases} x = \frac{d}{\det A}, \\ y = -\frac{b}{\det A}, \\ u = -\frac{c}{\det A}, \\ v = \frac{a}{\det A}. \end{cases}$$

不难验证, 这组解也满足矩阵方程②. 因此, 对于矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , 当  $\det A = ad-bc \neq 0$  时, 我们就找到了一个矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{\det A} & -\frac{b}{\det A} \\ -\frac{c}{\det A} & \frac{a}{\det A} \end{pmatrix},$$

① 亦称  $ad-bc$  为二阶行列式  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  的展开式, 它是位于两条对角线上元素的乘积之差.

满足

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{d}{\det A} & \frac{-b}{\det A} \\ \frac{-c}{\det A} & \frac{a}{\det A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{\det A} & \frac{-b}{\det A} \\ \frac{-c}{\det A} & \frac{a}{\det A} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

所以, 我们得到

**定理** 二阶矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  可逆, 当且仅当  $\det A = ad - bc \neq 0$ .

当矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  可逆时,  $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{\det A} & \frac{-b}{\det A} \\ \frac{-c}{\det A} & \frac{a}{\det A} \end{pmatrix}$  ①.

至此, 我们解决了如何判断二阶矩阵是否可逆以及如何求可逆矩阵的逆矩阵的问题.

① 数据  $ad - bc$  对于判断矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  是否可逆以及求逆矩阵具有特别的重要性, 这是我们把它定义为矩阵  $A$  的行列式  $\det A$  的重要原因.

**例 3** 计算下列二阶行列式:

(1)  $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ ; (2)  $\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 \\ 1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$ .

解: (1) 原式  $= 3 \times 2 - 1 \times 4 = 2$ ;

(2) 原式  $= (\lambda-2)(\lambda-3) - 2 \times 1$   
 $= \lambda^2 - 5\lambda + 4$ .

**例 4** 判断下列二阶矩阵是否可逆. 若可逆, 求出逆矩阵.

(1)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ; (2)  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

解: (1) 因为

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

所以, 矩阵  $A$  是可逆的, 且

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{0}{1} & \frac{-1}{1} \\ \frac{-(-1)}{1} & \frac{0}{1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

(2) 因为

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

所以, 矩阵  $B$  不可逆.

### 思考

二阶矩阵  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  与二阶行列式  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  的主要区别是什么?

### 习题3.2

1. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}.$$

2. 判别下列二阶矩阵是否可逆? 若可逆, 求出逆矩阵:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(2) \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(3) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(4) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

3. (1)  $k$  取何值时, 矩阵  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & k \end{pmatrix}$  可逆?

(2)  $k$  取何值时, 矩阵  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & k \end{pmatrix}^{-1}$  的所有元素都是整数?

4.  $a, b$  取何值时, 矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  可逆? 此时, 矩阵  $A$  的逆矩阵是什么?

5. 利用逆矩阵求适合下列式子的未知二阶矩阵  $X$ :

$$(1) \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(2) X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

## 三 逆矩阵与二元一次方程组

在初中, 我们从解析几何的角度解释过二元一次方程组的解, 即二元一次方程组的解可以看作是直角坐标系  $xOy$  内相应的两条直线交点的坐标. 现在我们学习了线性变换, 线性变换的表达式的形式与二元一次方程组的形式有很多相似之处, 能否从线性变换的角度

来解释它呢?本节中,我们将从线性变换的角度来认识解二元一次方程组的意义,并利用逆矩阵解一类特殊的二元一次方程组.

## 1. 二元一次方程组的矩阵形式

把二元一次方程组

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 3, \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1 \end{cases} \quad ①$$

写成向量的形式为

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

根据矩阵与向量乘法的定义,得

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{pmatrix},$$

于是,方程组①变形为

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad ②$$

类似于上面的过程,一般地,关于变量  $x, y$  的二元一次方程组

$$\begin{cases} ax + by = e, \\ cx + dy = f \end{cases} \quad ③$$

(其中  $a, b, c, d$  均为常数)可以写成

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}, \quad ④$$

其中矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  是把二元一次方程组③中未知数  $x, y$  的系数按原来的顺序写出来得到的,所以称之为二元一次方程组③的系数矩阵,④式称为二元一次方程组③的矩阵形式.②式就是二元一次方程组①的矩阵形式.

### 探究

二元一次方程组的系数矩阵对应着一个线性变换,你能从线性变换的角度揭示解二元一次方程组的意义吗?

对二元一次方程组①，它的系数矩阵  $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$  对应的线性变换为旋转变换

$$R_{30^\circ}: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

从方程组的矩阵形式②式可以看出，解二元一次方程组①就是找出向量  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ，使得它在旋转变换  $R_{30^\circ}$  的作用下的结果为给定的向量  $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。

类似地，对于一般的二元一次方程组③，从线性变换的角度来看，解这个方程组可以表述为：

已知线性变换

$$\rho: \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

和平面上的一个确定的向量  $\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ ，找出平面上的向量  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ，使得该向量在线性变换  $\rho$  的作用下变成已知向量  $\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$  ①。

有时我们也把二元一次方程组③的解写成向量  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  的形式，称这种形式的解为二元一次方程组③的解向量。

① 在实际操作中，如果线性变换  $\rho$  的意义不明显或不为我们熟知，那么很难找出向量  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ，使得  $\rho\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ 。

## 2. 逆矩阵与二元一次方程组

### 探究

如果二元一次方程组的系数矩阵可逆，能利用逆矩阵来解方程组吗？

我们知道，二元一次方程组①的系数矩阵  $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$  是可逆的，从线性变换的角度看，

解方程组①就是找出向量  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  使得它在旋转变换



$$R_{30^\circ} : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

的作用下的结果为给定的向量  $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 也就是说, 把向量  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  按逆时针方向绕原点  $O$  旋转  $30^\circ$  后得到向量  $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ . 换个角度看, 向量  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  可以看成是把向量  $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$  按顺时针方向绕原点  $O$  旋转  $30^\circ$  后得到的, 即

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R_{-30^\circ} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = R_{30^\circ}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

因此, 二元一次方程组①一定有解, 且解为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= R_{-30^\circ} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = R_{30^\circ}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{3}+1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由于二元一次方程组①的任意一个解向量都满足

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

从几何上容易看出, 只有唯一的一个向量按逆时针方向绕原点  $O$  旋转  $30^\circ$  后得到向量  $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,

因此, 二元一次方程组①的解是唯一的.

一般地, 我们下面的定理.

**定理** 如果关于变量  $x, y$  的二元一次方程组 (线性方程组)

$$\begin{cases} ax+by=e, \\ cx+dy=f \end{cases} \quad (2)$$

的系数矩阵  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  可逆, 那么该方程组有唯一解

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

证明: 当  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  可逆时, 由二元一次方程组②的矩阵形式  $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$  得,

$$A^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix},$$

从而

$$(A^{-1}A) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix},$$

所以

$$E_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix},$$

因此, 二元一次方程组②有解

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

再设  $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$  是二元一次方程组②的任意两个解, 由上面的证明过程可得,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix},$$

从而  $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ , 所以二元一次方程组②的解是唯一的.

**推论** 关于变量  $x, y$  的二元一次方程组

$$\begin{cases} ax+by=0, \\ cx+dy=0, \end{cases} \quad (3)$$

其中  $a, b, c, d$  是不全为零的常数, 有非零解的充分必要条件

是系数矩阵的行列式  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$ .

**证明:** (1) 必要性

如果二元一次方程组③有非零解, 则其系数矩阵  $A =$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  不可逆. 否则, 由上面的定理得, 二元一次方程组③

有唯一的解  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , 矛盾! 又因为矩阵

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  可逆的充分必要条件是矩阵的行列式  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ , 所以  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$ .

(2) 充分性

假设系数矩阵的行列式  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$ , 即  $ad-bc=0$ , 从而二元一次方程组③中  $x, y$  项

称常数项都为零的线性方程组为齐次线性方程组, 显然  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  是其一个解, 称之为零解. 如果向量  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  ( $x_0, y_0$  不全为零) 是该方程组的解 (向量), 则称之为一个非零解.

的系数对应成比例. 用加减消元法解方程组③可得, 该方程组与方程  $ax+by=0$  同解. 不妨设  $a \neq 0$ , 令  $y=1$ , 则  $x=-\frac{b}{a}$ , 从而  $\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{b}{a} \end{bmatrix}$  是方程  $ax+by=0$  的一个非零解, 因而也是二元一次方程组③的一个非零解.

例 1 用逆矩阵解二元一次方程组  $\begin{cases} 3x+y=2, \\ 4x+2y=0. \end{cases}$

解: 二元一次方程组的系数矩阵为  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ , 该方程组的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

因为  $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 1 \times 4 = 2 \neq 0$ , 所以系数矩阵  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  可逆, 从而方程组

有唯一的解  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ , 而

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{|A|} & -\frac{1}{|A|} \\ -\frac{4}{|A|} & \frac{3}{|A|} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

代入上式得

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

所以, 原方程组的解为  $\begin{cases} x=2, \\ y=-4. \end{cases}$

### 思考

如果关于变量  $x, y$  的二元一次方程组  $\begin{cases} ax+by=e, \\ cx+dy=f \end{cases}$  的系数矩阵  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  不

可逆, 那么它的解的情况如何?

从形式上看,解二元一次方程组是纯粹的代数问题,通过本节的学习,我们看到,还可以用线性变换的观点来认识解二元一次方程组的意义,即从几何变换的角度来认识.这一点与我们学过的用函数图象的观点来认识解一元一次方程、一元二次方程的意义有某些相似性.

需要指出的是,用逆矩阵的方法解二元一次方程组时,必须要求其系数矩阵可逆.我们在解一般的二元一次方程组、三元一次方程组、四元一次方程组等方程组(通常称为线性方程组)时,一般不采用或不能采用本节介绍的方法,同学们将在以后的学习中获得有关方法.

### 3 题3.3



1. 试通过几何直观,从线性变换的角度求解下列二元一次方程组:

$$(1) \begin{cases} x+2y=1, \\ y=1; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y = -1, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y = 1. \end{cases}$$

2. 用逆矩阵的方法解二元一次方程组:

$$(1) \begin{cases} 5x-3y=1, \\ 2x-y=-2; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 3x+2y=0, \\ x+y=-2; \end{cases} \quad (3) \begin{cases} 3x+y=2, \\ 4x+2y=3. \end{cases}$$

3.  $\lambda$  为何值时,二元一次方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

有非零解?



## 三阶矩阵与三阶行列式

我们知道, 正方形数表  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  称为二阶矩阵, 数  $a, b, c, d$  称为二阶矩阵的元素.

利用二阶矩阵及其运算(二阶矩阵与平面向量的乘法运算、二阶矩阵的乘法等), 可以研究线性变换的一些性质. 能否将二阶矩阵的概念推广呢?

类似于二阶矩阵, 我们可以定义正方形数表

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

为三阶矩阵. 数  $a_i, b_i, c_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 称为矩阵的元素. 在三阶矩阵中, 横的叫行, 从上到下依次称为矩阵的第一行、第二行、第三行; 竖的叫列, 从左到右依次称为矩阵的第一列、第二列和第三列.

与二阶矩阵类似, 我们可以定义三阶矩阵的相等; 三阶矩阵与三维列向量  $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  的乘法;

三阶矩阵的乘法; 三阶矩阵的逆矩阵; 三阶行列式; ... 我们可以研究前面二阶矩阵中研究过的所有相应的问题. 例如, 我们可以定义三阶矩阵与三维列向量的乘法为:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1x + b_1y + c_1z \\ a_2x + b_2y + c_2z \\ a_3x + b_3y + c_3z \end{bmatrix};$$

可以利用二阶行列式定义三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix};$$

.....

你能类比前面的研究, 自己定义与三阶矩阵有关的运算, 提出一些问题, 进行一些研究吗?